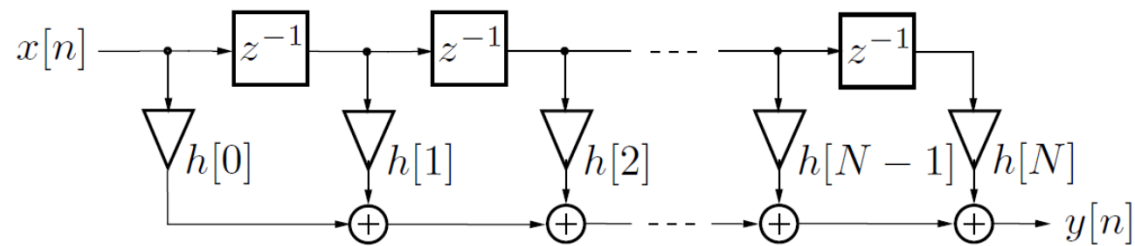


Estruturas de Filtros Discretos no Tempo

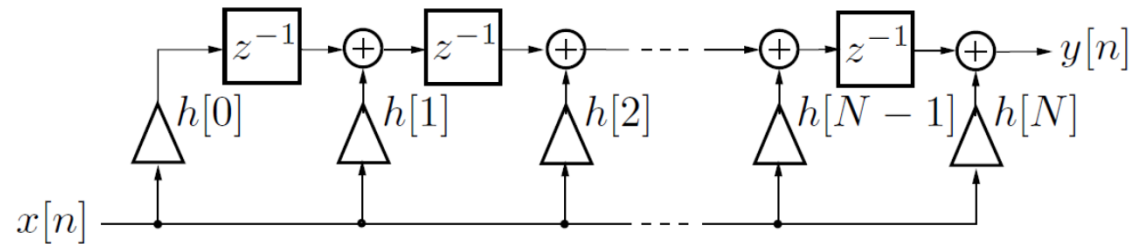
A. Petraglia
Universidade Federal do Rio de Janeiro
DEL, COPPE

Estruturas de Filtros FIR

- **Forma Direta** $H(z) = \sum_{n=0}^N h[n]z^{-n}$



Estrutura transposta:

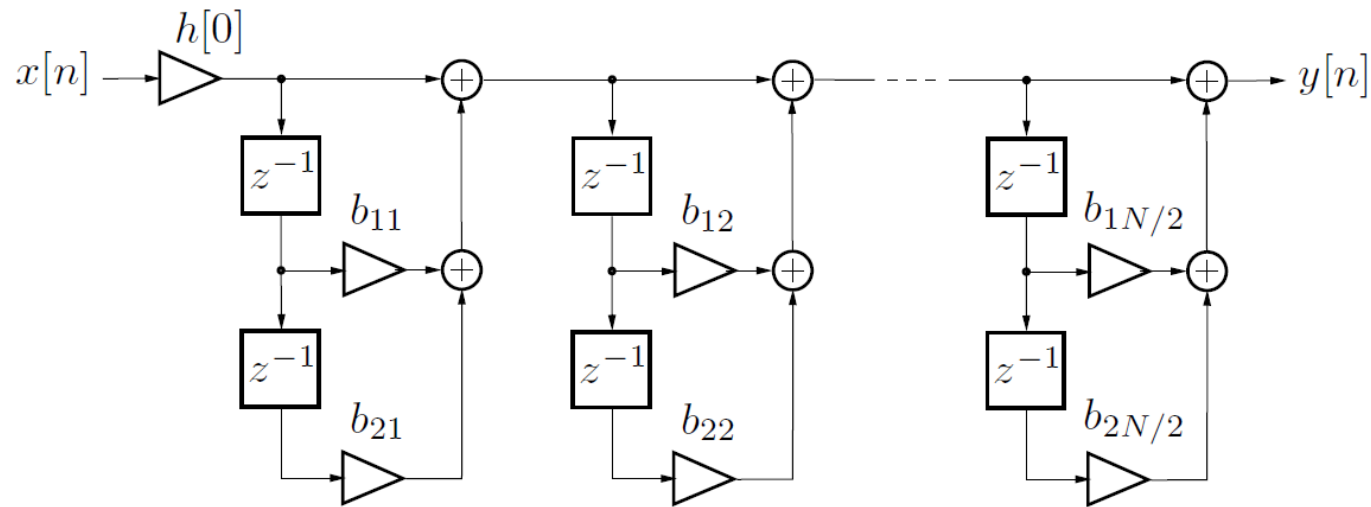


Complexidade computacional: $N+1$ multiplicações; N somas; N atrasos

Estruturas de Filtros FIR

- **Forma Cascata**

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h[n]z^{-n} = h[0] \prod_{k=1}^{N/2} (1 + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2})$$



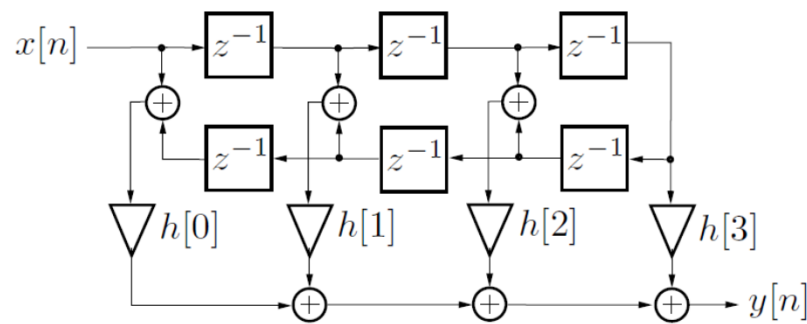
Vantagem: erros nos coeficientes de uma seção causam desvios **somente** nos zeros daquela seção.

Desvantagem: Imprecisão no cálculo dos zeros do polinômio $H(z)$.

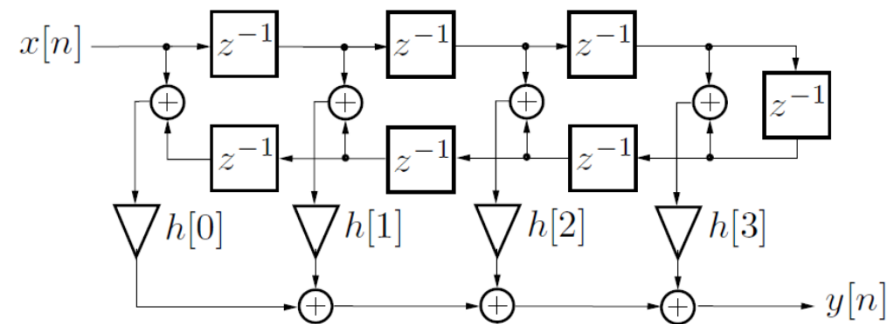
Estruturas de Filtros FIR

- **Filtros com Fase Linear**

Coeficientes são simétricos:



Tipo I ($N = 6$)



Tipo II ($N = 7$)

- Número de multiplicações é reduzido pela metade;
- Fase linear é garantida, apesar dos errors de realização dos multiplicadores.

Estruturas de Filtros IIR

- **Realização na Forma Direta**

Função de transferência:

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}}$$

Definindo

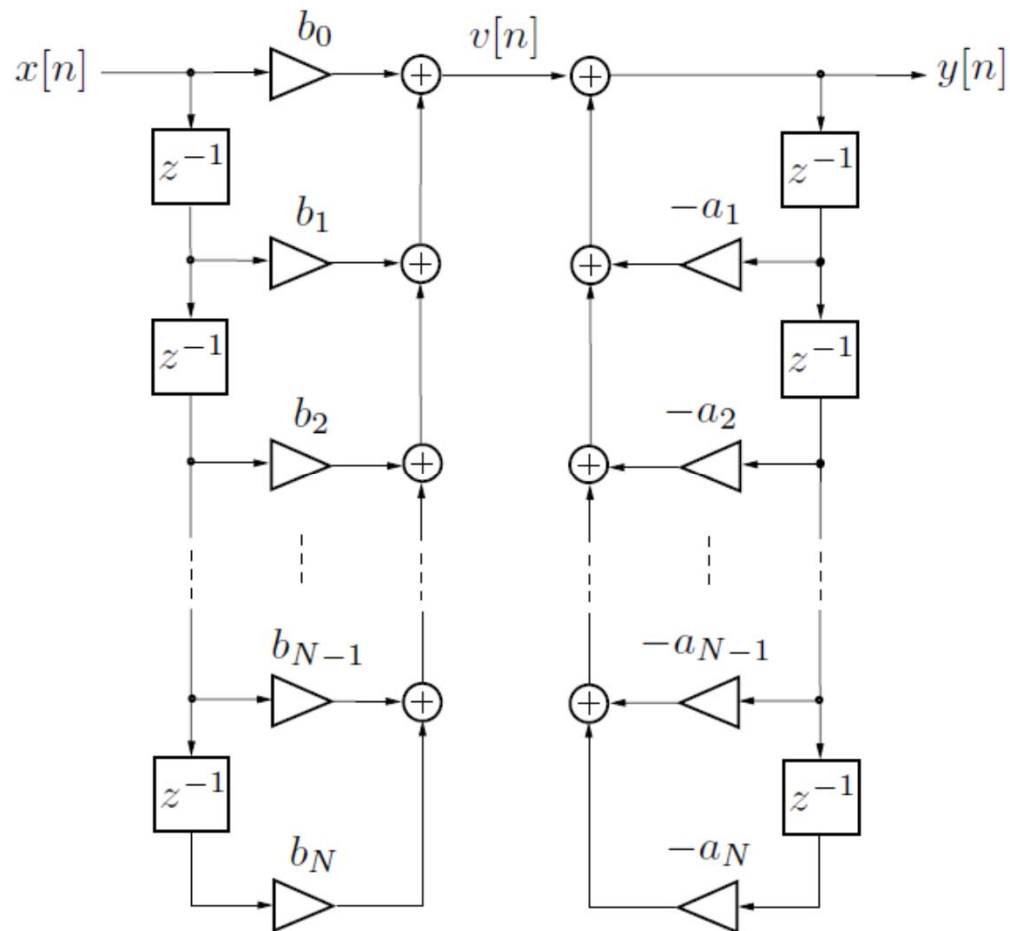
$$H_1(z) = \sum_{n=0}^N b_n z^{-n} \quad \text{e} \quad H_2(z) = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}}$$

Podemos escrever:

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

Estruturas de Filtros IIR

- **Forma Direta I ($M = N$)**



$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

$$H_1(z) = \frac{V(z)}{X(z)} = \sum_{n=0}^N b_n z^{-n}$$

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}}$$

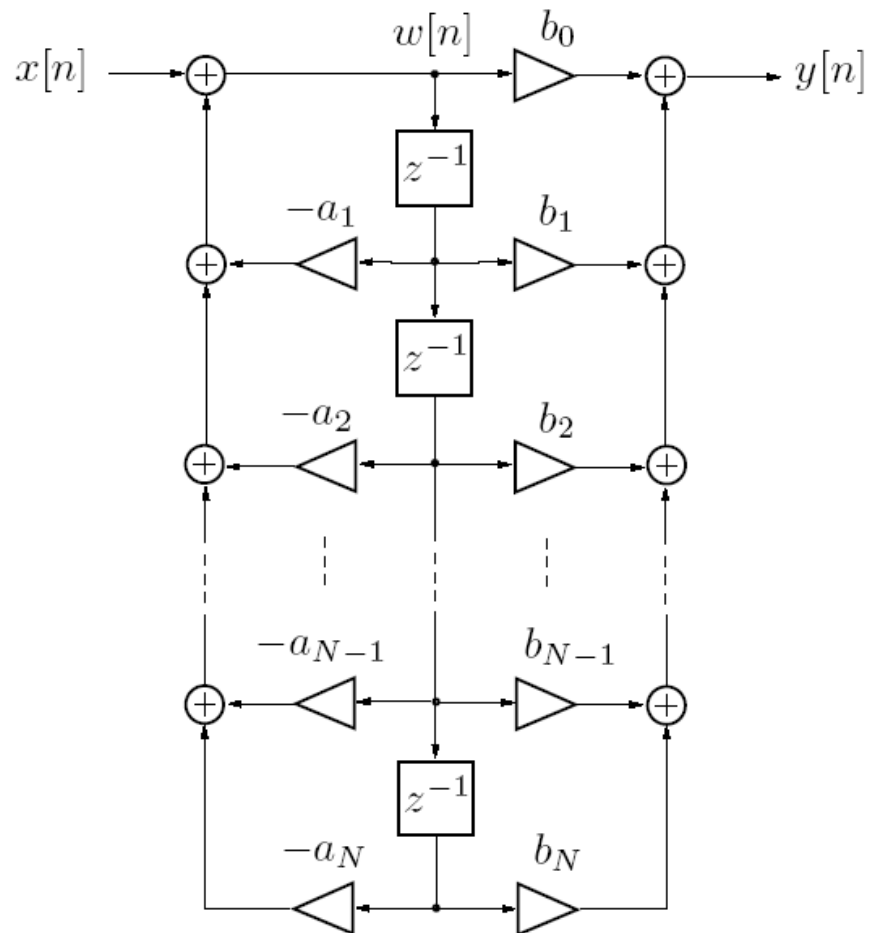
Complexidade computacional:

$2N$ somas; $2N$ atrasos

$2N + 1$ multiplicações;

Estruturas de Filtros IIR

- **Forma Direta II**



Invertendo a ordem da conexão cascata:

$$H(z) = H_2(z) \cdot H_1(z)$$

⇒ Cadeia de atrasos compartilhada pelas duas seções.

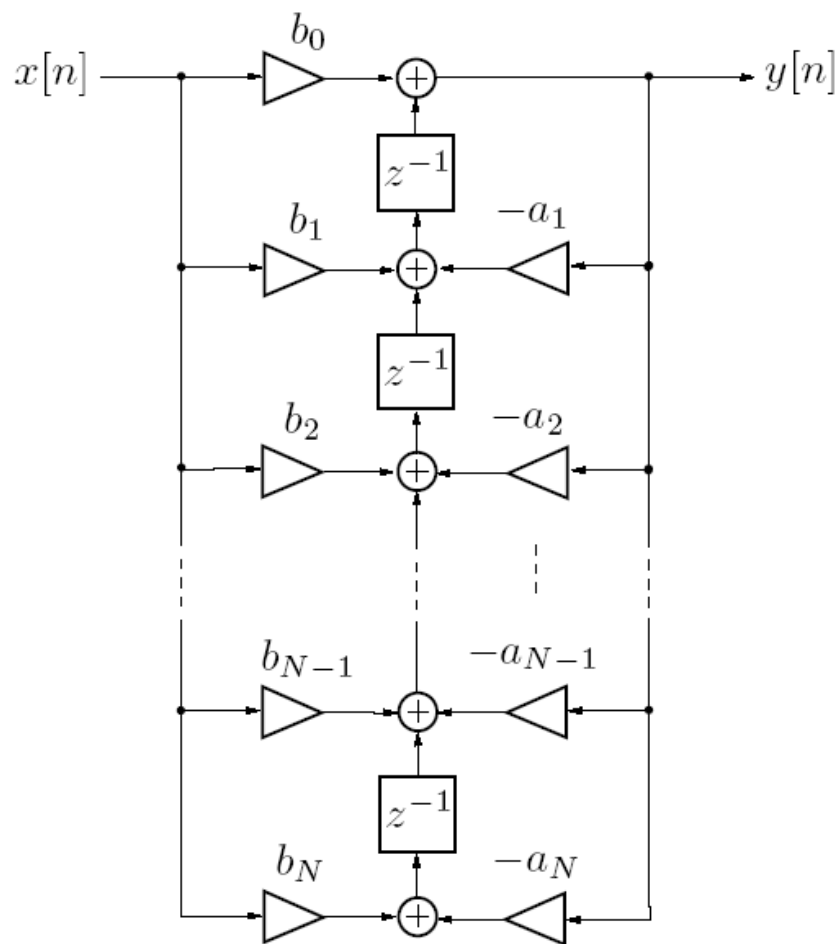
Complexidade computacional:

$2N$ somas; N atrasos;

$2N + 1$ multiplicações;

Estruturas de Filtros IIR

Transposta da Forma Direta II

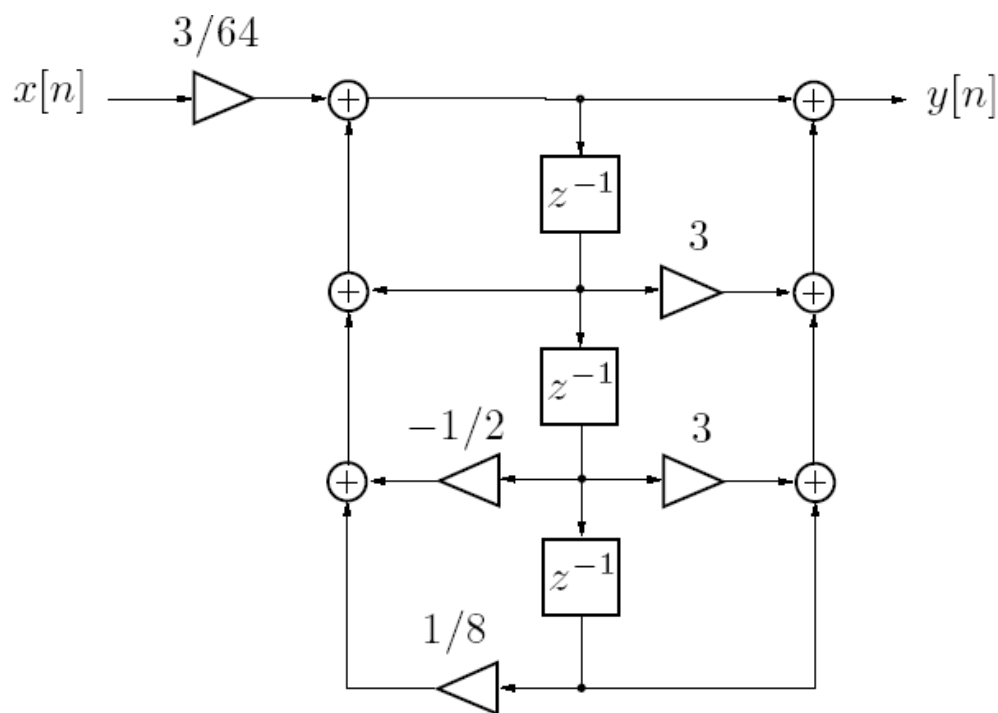


Complexidade computacional:
 $N + 1$ somas; N atrasos;
 $2N + 1$ multiplicações;

Estruturas de Filtros IIR

- **Exemplo 1:** Realizar na Forma Direta II

$$H(z) = \frac{\frac{3}{64}(1 + z^{-1})^3}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2})} = \frac{3}{64} \cdot \frac{1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}$$



Estruturas de Filtros IIR

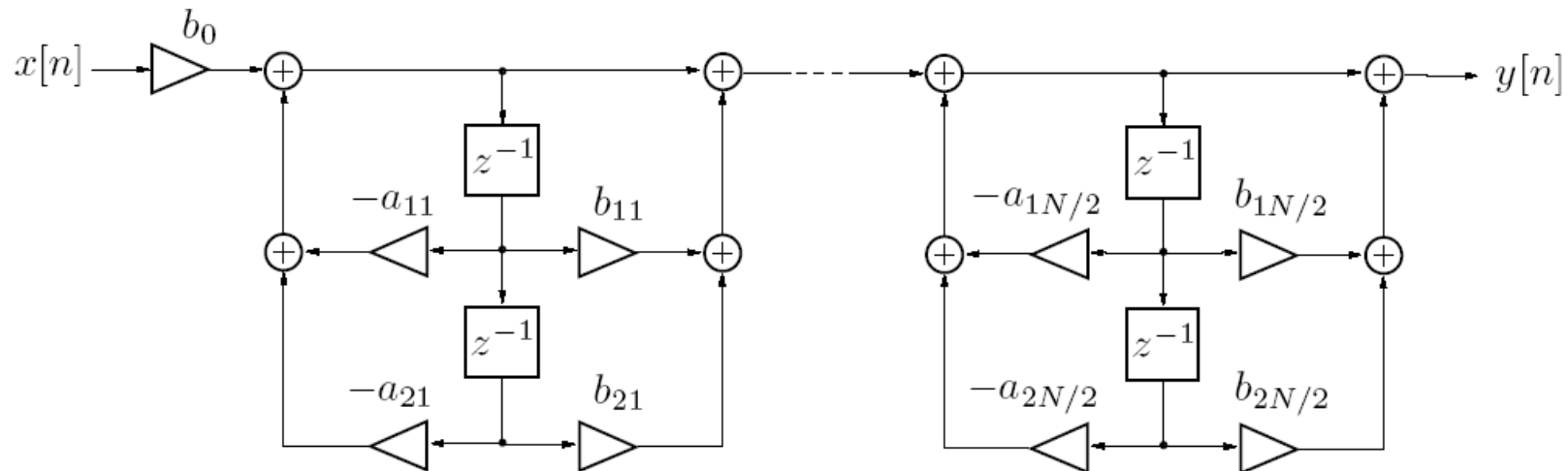
- **Vantagens da forma direta**
 - Simples de ser implementada;
 - Mínima complexidade computacional;
- **Desvantagem da forma direta**
 - Muito sensível aos erros nos multiplicadores;
 - Em particular erros nos multiplicadores que realizam o **denominador** provocam erros muito grandes na **faixa de passagem** do filtro;
- **As formas paralela e cascata são menos sensíveis**

Estruturas de Filtros IIR

- **Forma Cascata II**

Escrevendo o numerador e o denominador como produtos de termos de ordens menores:

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^{N/2} \frac{1 + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}}$$



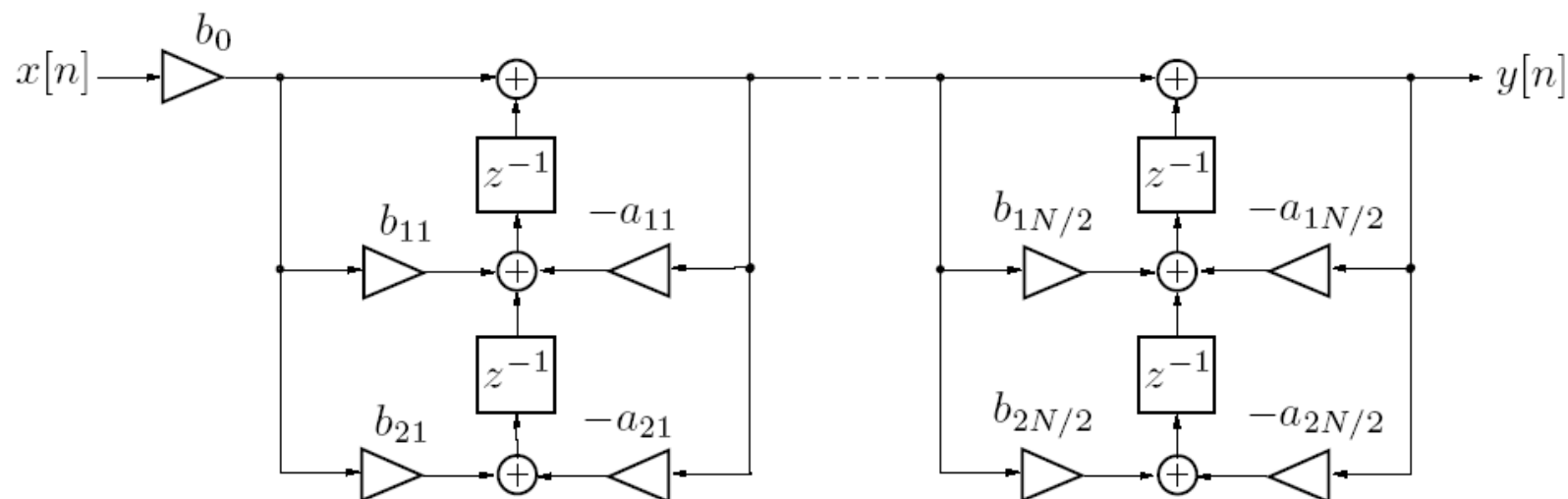
Complexidade computacional: $2N$ somas; N atrasos; $2N + 1$ multiplicações;

Estruturas de Filtros IIR

- **Forma Cascata I**

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^{N/2} \frac{1 + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}}$$

É a transposta da forma cascata II:

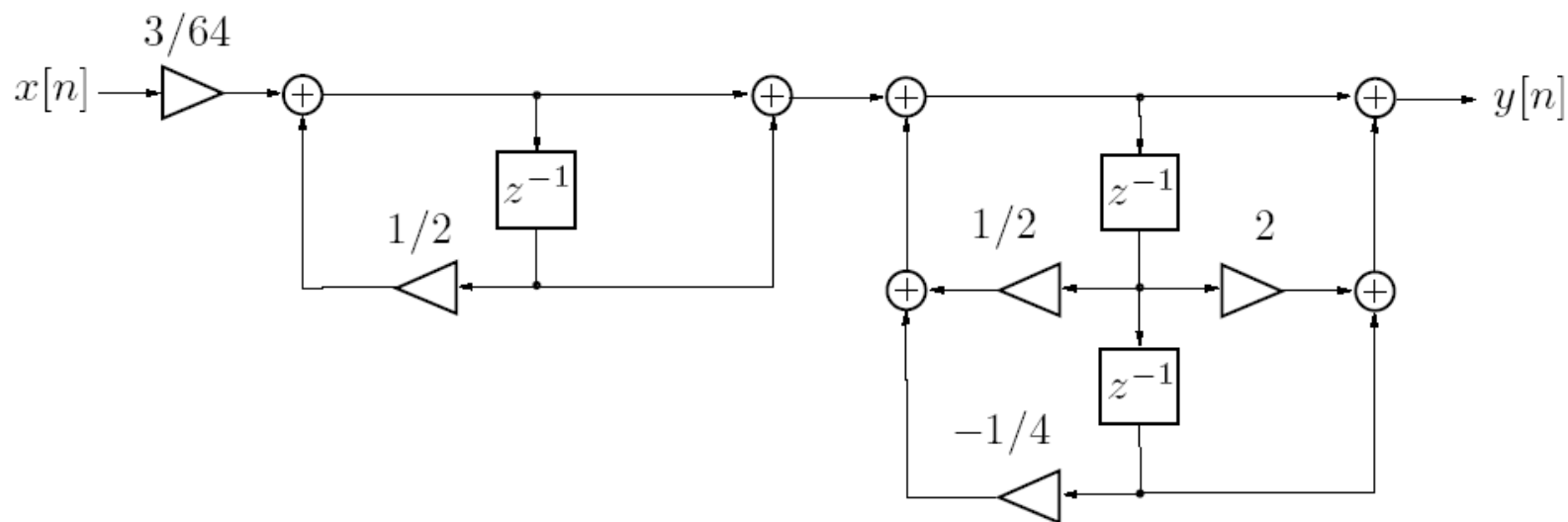


Complexidade computacional: N somas; N atrasos; $2N + 1$ multiplicações;

Estruturas de Filtros IIR

- **Exemplo 2:** Realizar a função de transferência do Exemplo 1 na forma cascata II:

$$H(z) = \frac{\frac{3}{64}(1 + z^{-1})^3}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2})}$$



Estruturas de Filtros IIR

- **Principal vantagem da forma cascata**
 - Erros de realização dos coeficientes da k -ésima seção afetam **apenas** os pólos e zeros de $H(z)$ realizados **nessa** seção;
 - ⇒ Distorções na resposta em frequência são muito menores do que as da forma direta tanto na faixa de passagem quanto na de rejeição.
- **Desvantagem**
 - Ruído se acumula no sinal na medida em que este passa de uma seção para a seguinte. A forma paralela é melhor nesse aspecto.

Estruturas de Filtros IIR

- **Forma Paralela II**

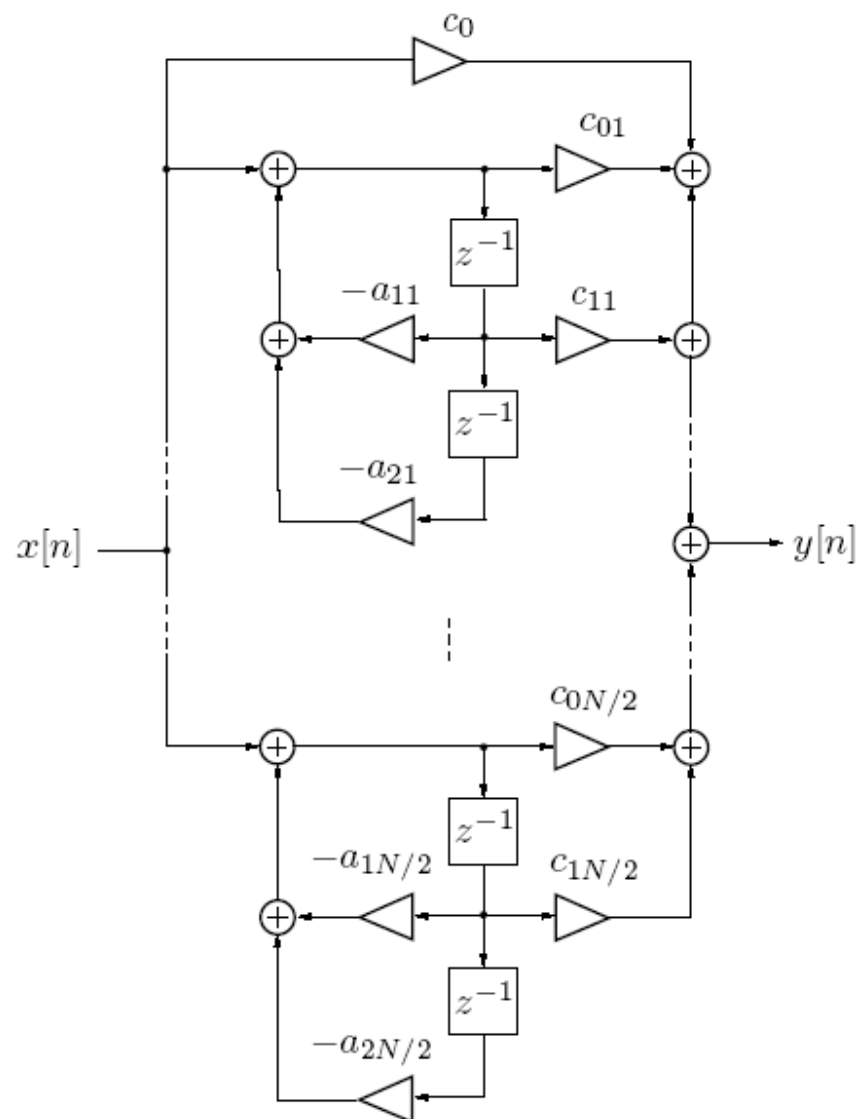
$H(z)$ é expandida como uma soma de funções de ordens menores:

$$H(z) = c_0 + \sum_{k=1}^{N/2} \frac{c_{0k} + c_{1k}z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}}$$

Complexidade computacional:

$2N$ somas; N atrasos;

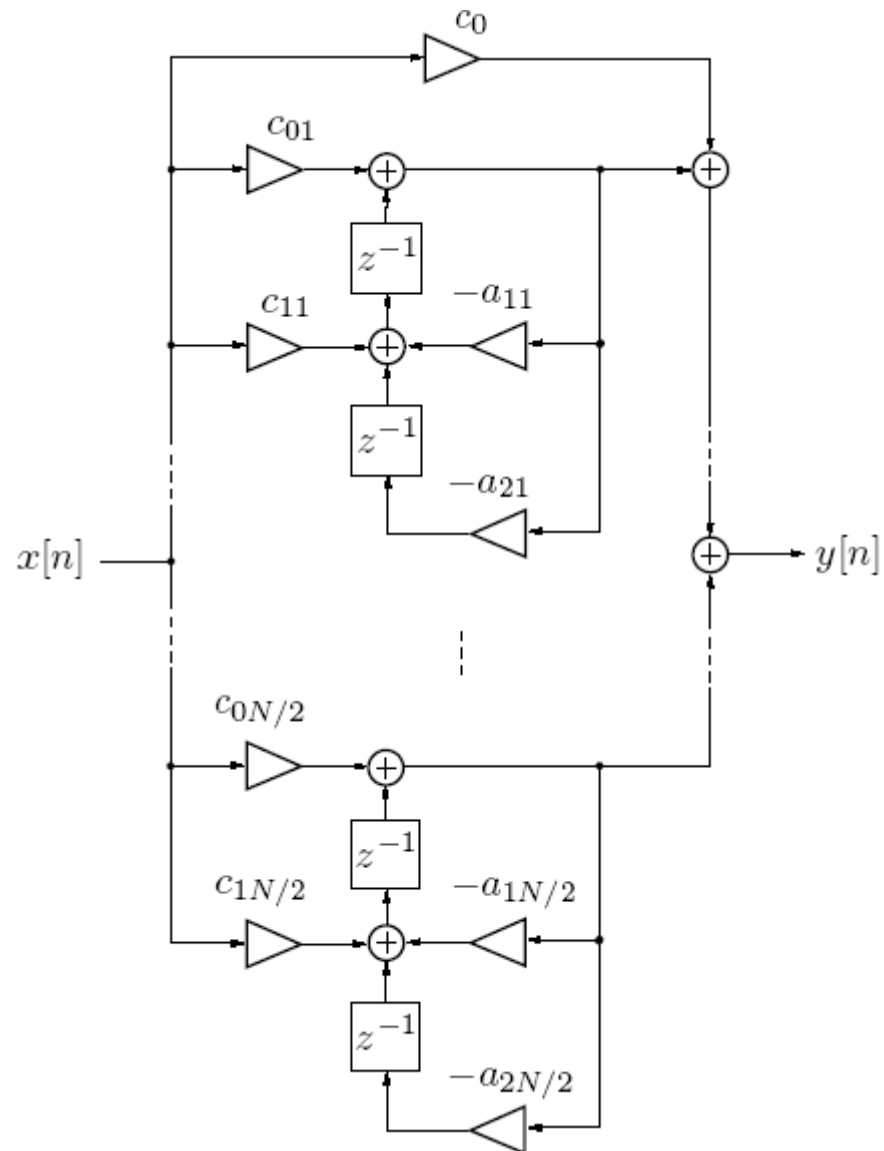
$2N + 1$ multiplicações;



Estruturas de Filtros IIR

- **Forma Paralela I**

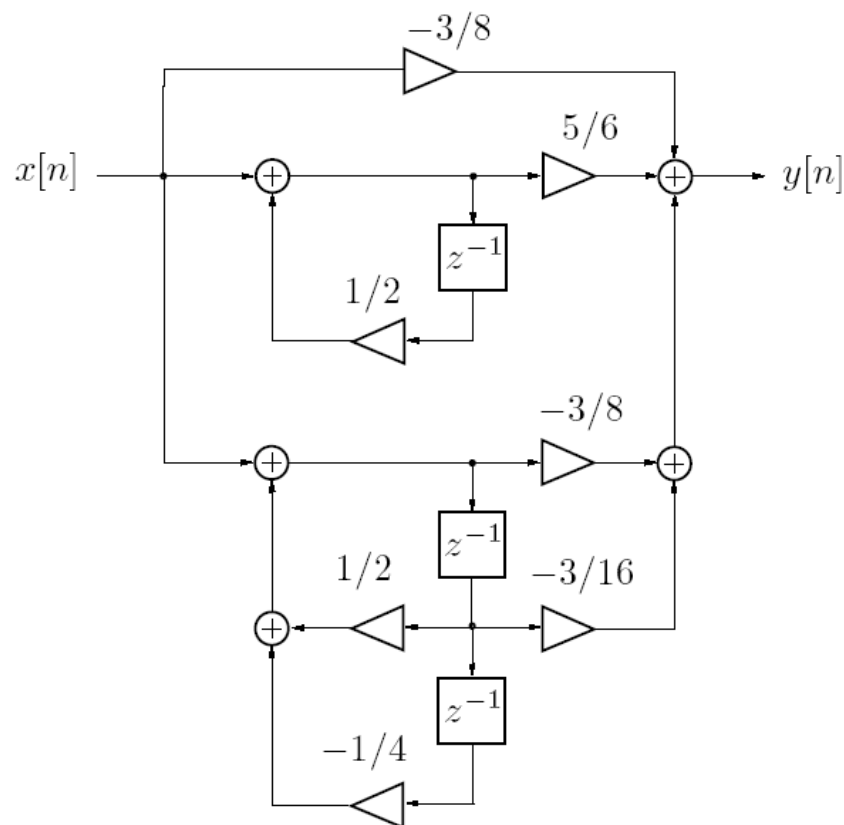
- Transposta da forma paralela II
- Complexidade computacional:
 $2N$ somas; N atrasos;
 $2N + 1$ multiplicações;



Estruturas de Filtros IIR

- **Exemplo 3:** Realizar a função de transferência do Exemplo 1 na forma paralela II:

$$H(z) = -\frac{3}{8} + \frac{5/6}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{\frac{3}{8} + \frac{3}{16}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}$$



Estruturas de Filtros IIR

- **Vantagens da forma paralela**

- Erros de realização dos coeficientes da k-ésima seção afetam **apenas os pólos** de $H(z)$ realizados nessa seção;
 - ⇒ Distorções na resposta em frequência **na faixa de passagem** são muito menores do que as da forma direta.

- **Desvantagem**

- Erros de realização dos coeficientes da k-ésima seção afetam **todos os zeros** de $H(z)$;
 - ⇒ Distorções na resposta em frequência **na faixa de rejeição** são maiores do que as da forma cascata.

