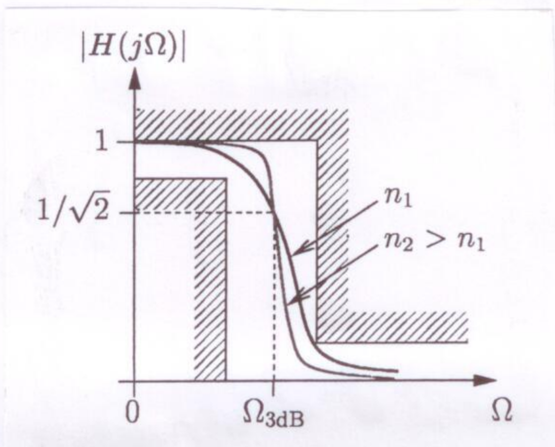
MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO PARA FILTROS ANALÓGICOS

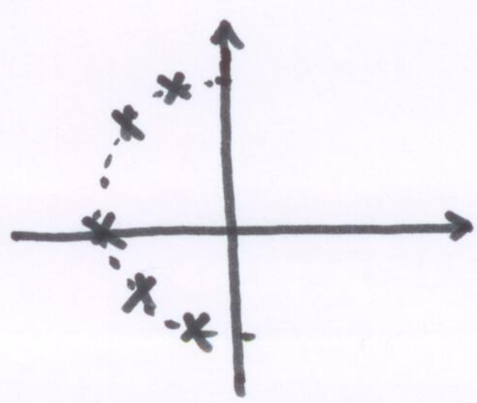
Uma Breve Revisão

1. Aproximação de Butterworth

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_{3dB}}\right)^{2N}}, \quad N = 1, 2, 3, \ldots$$



Pólos de $H(s)$ sobre o círculo de raio Ω_p.
Zeros no ∞.

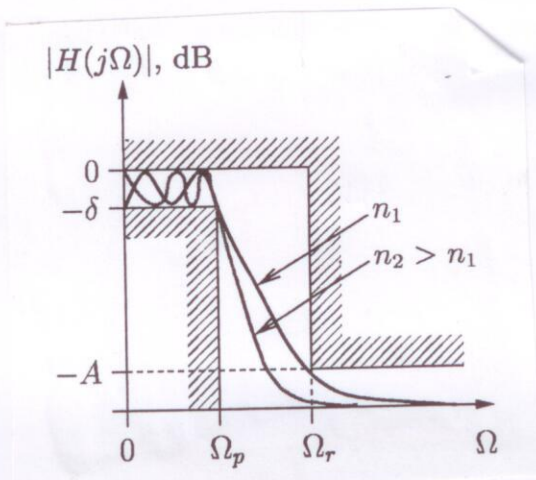


Plano s

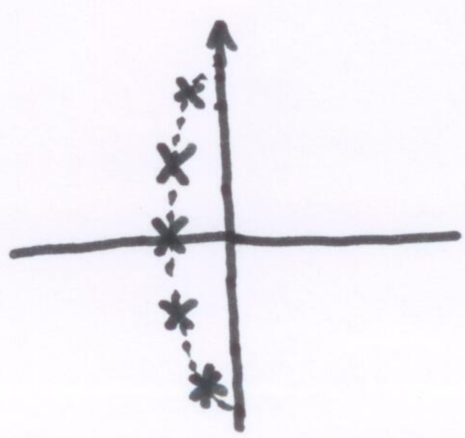
2. Aproximação de Chebyshev Tipo I

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}, \quad N=1,2,\dots$$

- $\epsilon < 1$, controla o "ripple" na banda de passagem;
- $C_N(\cdot)$ é o polinômio de Chebyshev de ordem N.



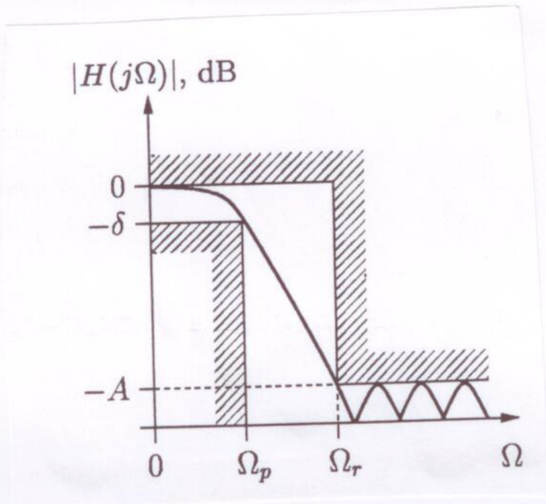
Pólos sobre uma elipse.
Zeros no ∞.



Plano s

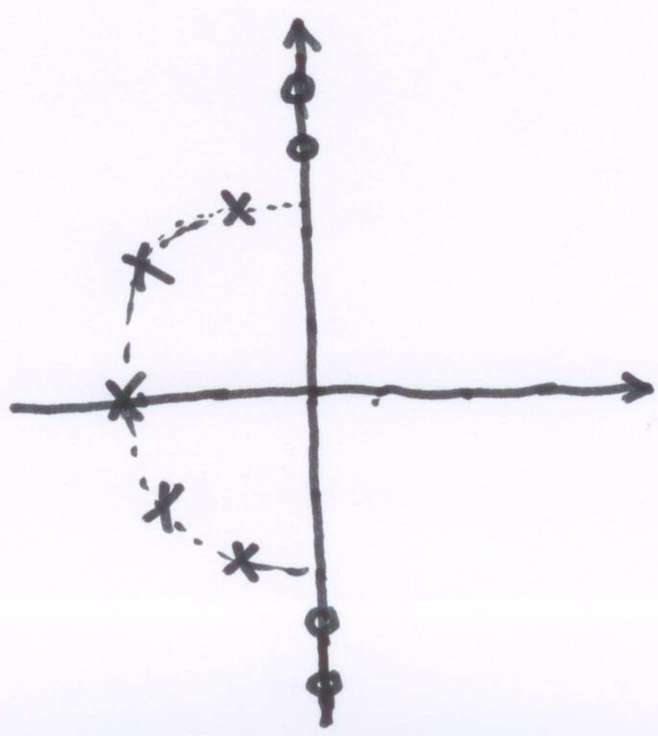
3. Aproximação de Chebyshev Tipo II

$$H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^{m} (s^2 + b_i)}{P(s)}$$



Pólos sobre o círculo de raio Ω_p

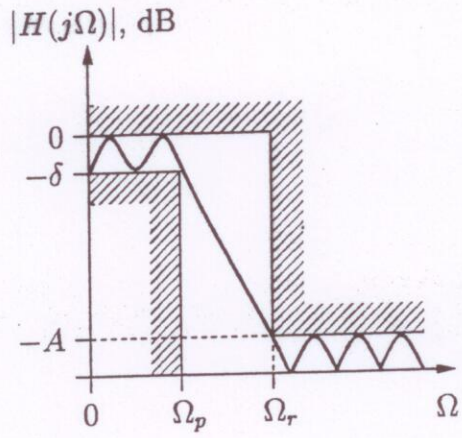
Zeros sobre o eixo imaginário, em $s = \pm j b_i$



4. Aproximação Elíptica

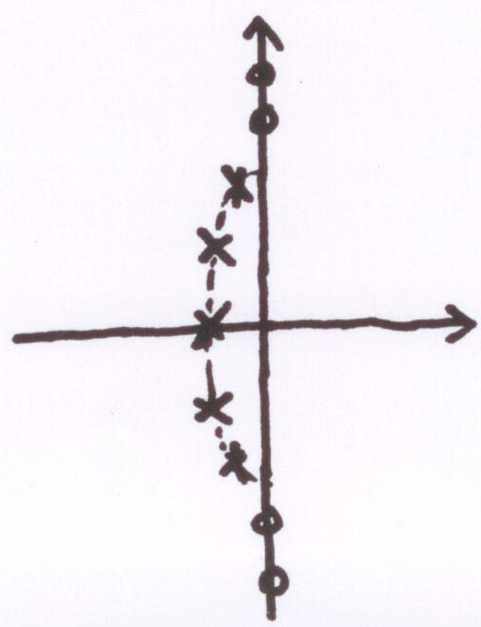
$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 R_N\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}, \quad N = 1, 2, \ldots$$

$R_N(\cdot)$ é uma razão de 2 polinômios.



Pólos sobre uma elipse

Zeros sobre o eixo imaginário



PROJETO DE FILTROS IIR

1. Método da Invariância ao Impulso

Dada a função de transferência $H(s)$ do filtro analógico, a resposta ao impulso desse filtro é

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

Amostrando $h(t)$ com período T, tem-se

$$g[n] = h(nT), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\{g[n]\} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(s + j\frac{2\pi n}{T}\right), \quad s = \frac{\ln z}{T} \end{aligned}$$

Em particular, para $z = e^{j\omega}$, tem-se

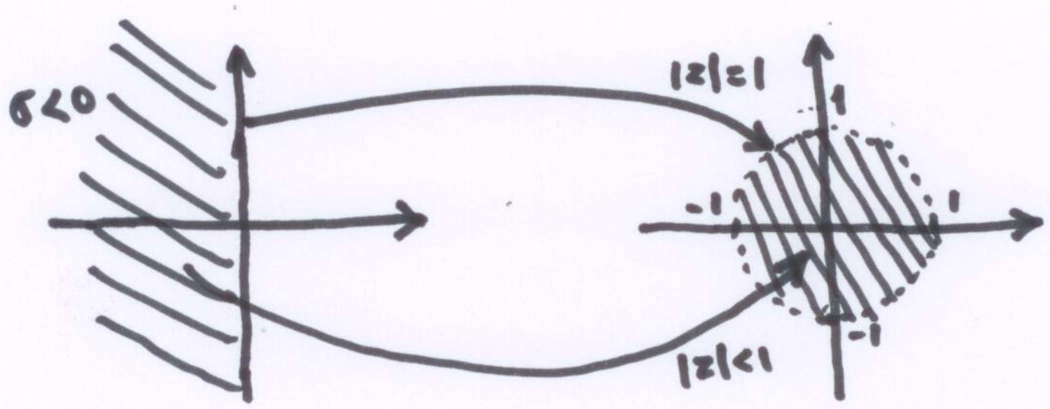
$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(j\frac{\omega}{T} + j\frac{2\pi n}{T}\right)$$

Para examinar a transformação $z = e^{sT}$, fazemos

$$s = \sigma + j\Omega \quad e \quad z = r e^{j\omega}$$

Logo:

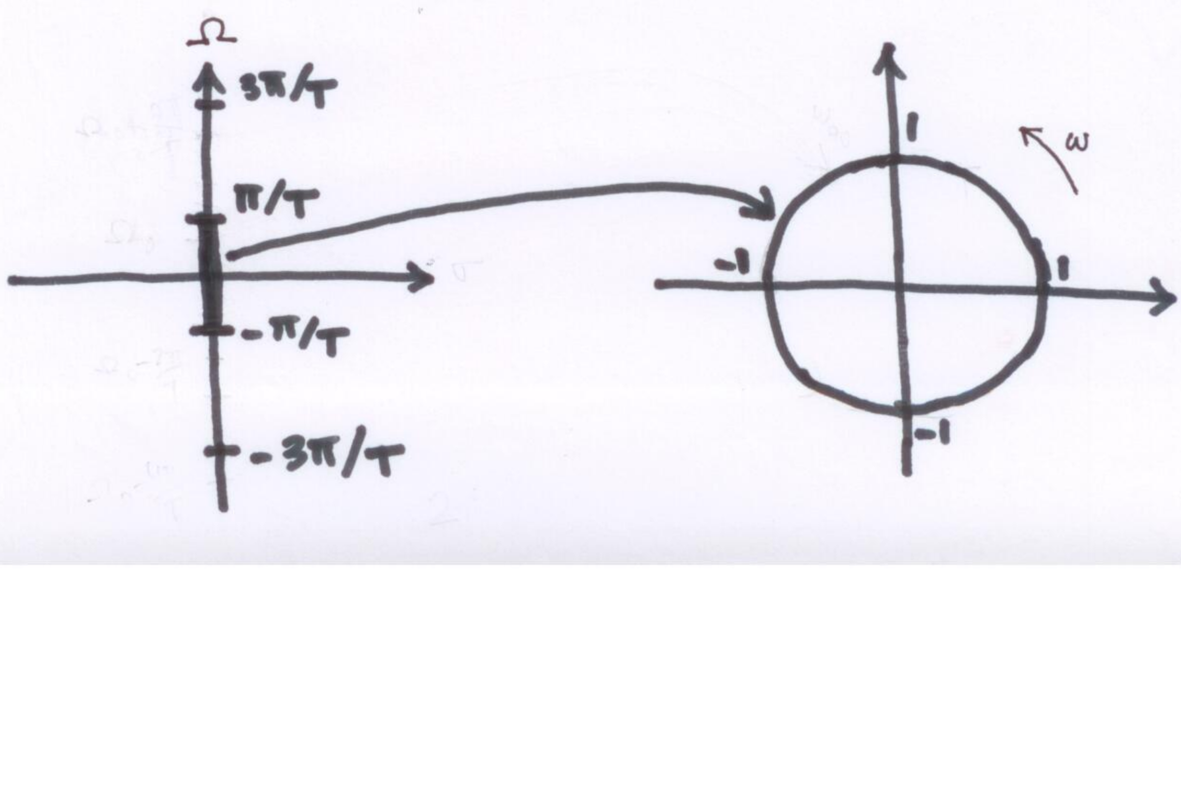
$$e^{\sigma T + j\Omega T} = r e^{j\omega} \Rightarrow r = e^{\sigma T}$$



Filtro analógico estável $\longrightarrow$ Filtro digital estável

Em particular, para $\sigma = 0$:

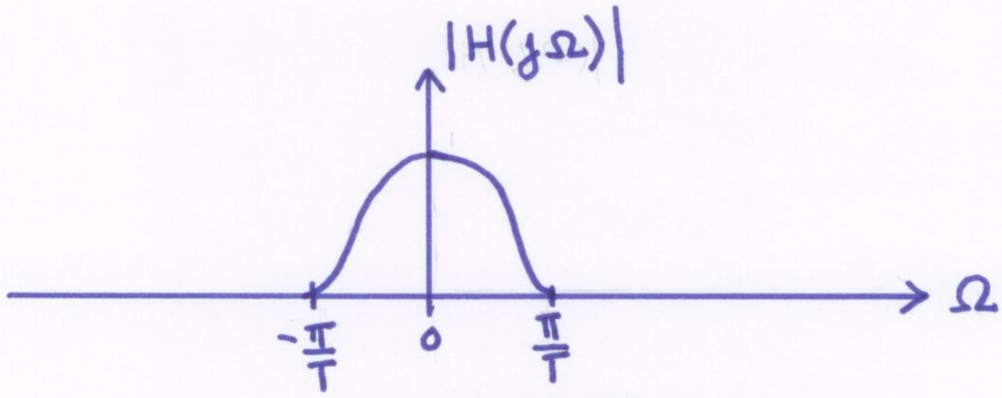
$$e^{j\Omega T} = e^{j\omega}$$

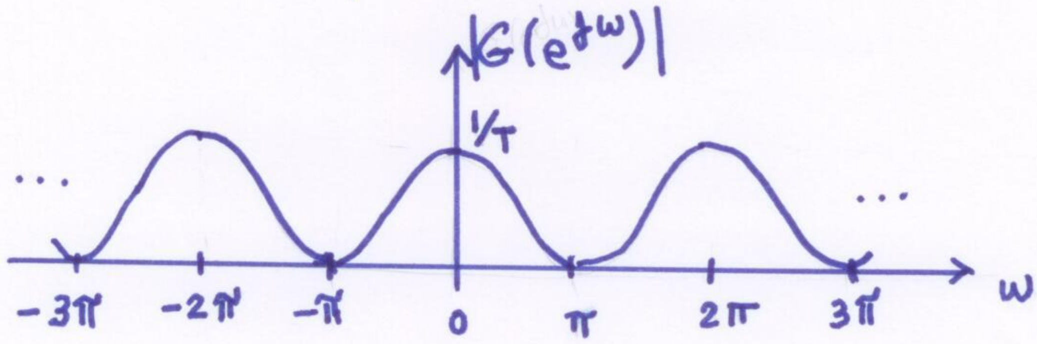


Portanto, todos os pontos $\Omega_0 + \frac{2\pi n}{T}$ sobre o eixo imaginário do plano s são mapeados no mesmo ponto ω_0 sobre o círculo unitário do plano z, já que

$$e^{j\left(\Omega_0 + \frac{2\pi n}{T}\right)} = e^{j\Omega_0 T}$$

Se $H(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| > \frac{\pi}{T}$, então não haverá distorção na resposta em freqüência do filtro digital.





Na prática, se $|H(j\Omega)| < 0{,}01$ para $|\Omega| \geq \frac{\pi}{T}$ o efeito de sobreposição das cópias deslocadas de $H(j\Omega)$ pode ser desprezado.

Ex.: $H(s) = \dfrac{A}{s+\alpha} \Rightarrow h(t) = A e^{-\alpha t} u(t)$

Então,

$$g[n] = h(nT) = A e^{-\alpha n T} u(n)$$

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT)\, z^{-n}$$

$$= \frac{A}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}}$$

para $e^{-\alpha T} < 1$. Esta condição é satisfeita se $\alpha > 0$, que é a condição de estabilidade do filtro analógico.

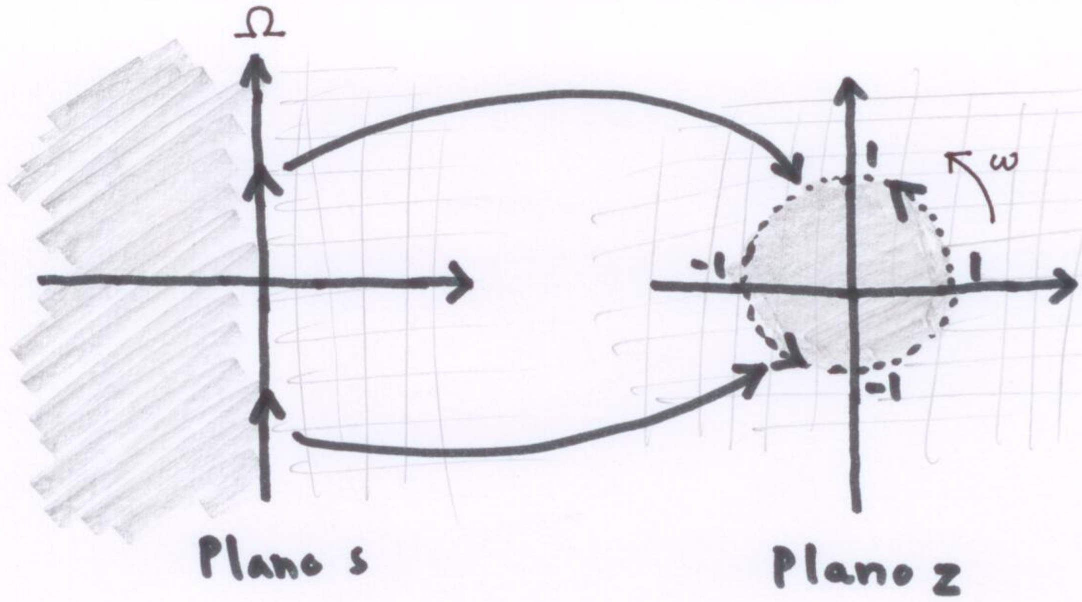
2. Método da Transformação Bilinear

Neste caso o mapeamento é definido por

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Então,

$$G(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

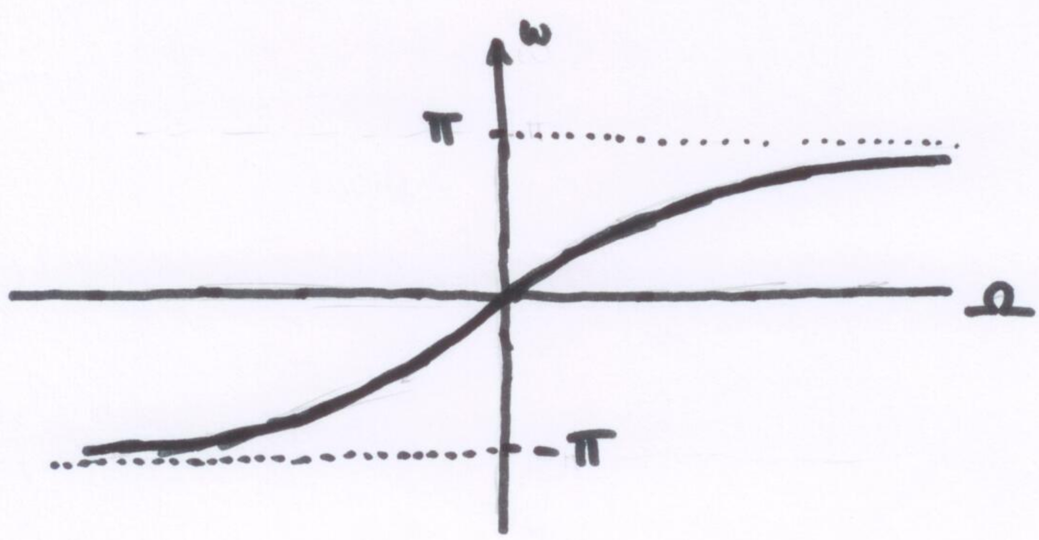


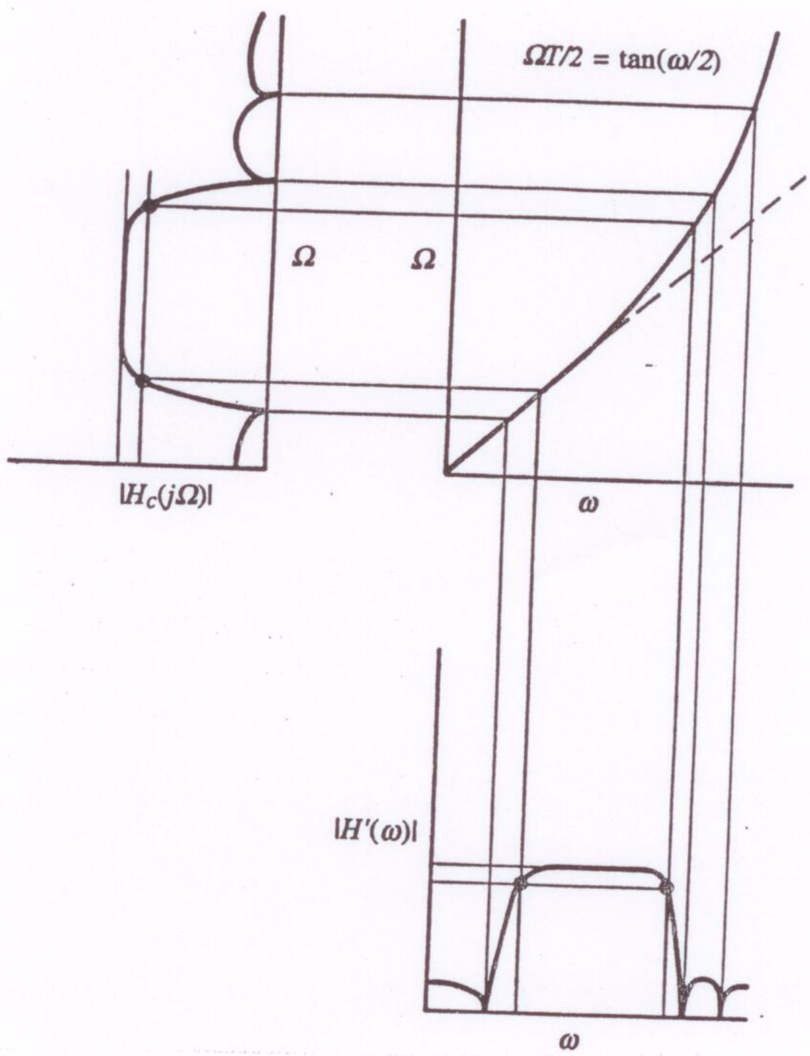
Um ponto no plano s é mapeado num único ponto do plano z. Fazendo $s = j\Omega$ e $z = e^{jw}$, obtemos

$$j\Omega = \frac{2}{T}\,\frac{1 - e^{-jw}}{1 + e^{-jw}}$$

$$= j\,\frac{2}{T}\tan\left(\frac{w}{2}\right)$$

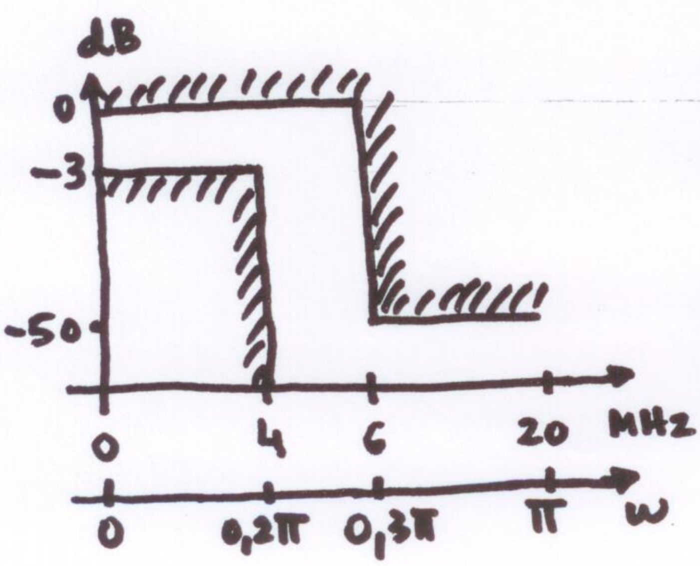
$$\therefore\ \Omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{w}{2}\right)$$

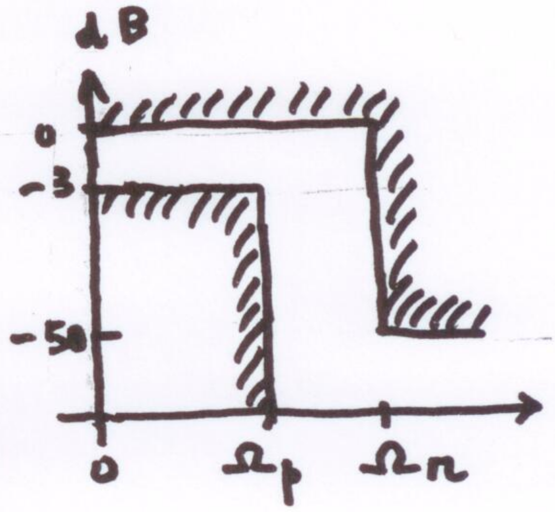



ΩT/2 = tan(ω/2)
Ω
Ω
|H_c(jΩ)|
ω
|H'(ω)|
ω

Dadas as freqüências ω_p e ω_r do filtro digital, encontramos Ω_p e Ω_r utilizando a equação $\Omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Com estas freqüências e com as especificações da resposta em freqüência desejada, obtém-se $H(s)$. Finalmente, usamos a transformação bilinear $(s \to z)$ para encontrar $G(z)$.

Ex. Obter a função de transferência de um filtro digital com "ripple" de 0,3 dB na banda de passagem (0 a 4 MHz) e atenuação de 50 dB na banda de rejeição (acima de 6 MHz). A freqüência de amostragem é igual a 40 MHz.





Fazendo $T=1$ temos

$$\Omega_p = 2\tan\frac{0{,}2\pi}{2} = 0{,}6498$$

$$\Omega_r = 2\tan\frac{0{,}3\pi}{} = 1{,}019$$

Fazendo $T=1$ temos

$$\Omega_p = 2\tan\frac{0{,}2\pi}{2} = 0{,}6498$$

$$\Omega_r = 2\tan\frac{0{,}3\pi}{2} = 1{,}019$$

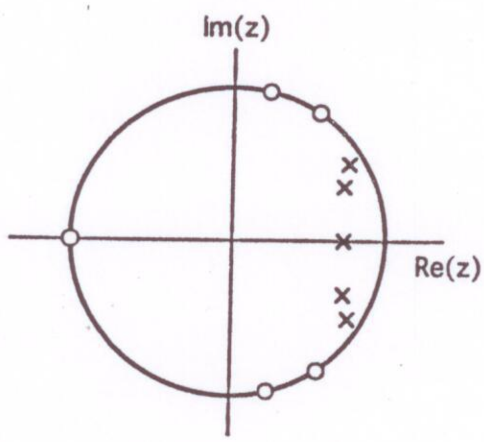
Com essas freqüências, "ripple" e atenuação determina-se a ordem (N) do fitro analógico:

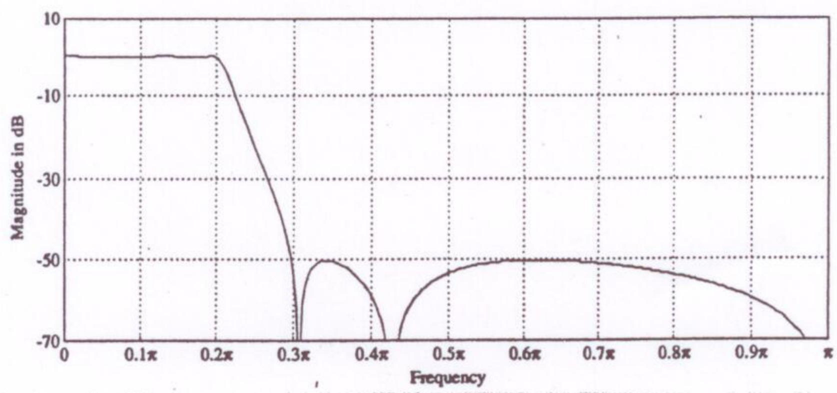
a) filtro de Chebyshev : $N = 8$

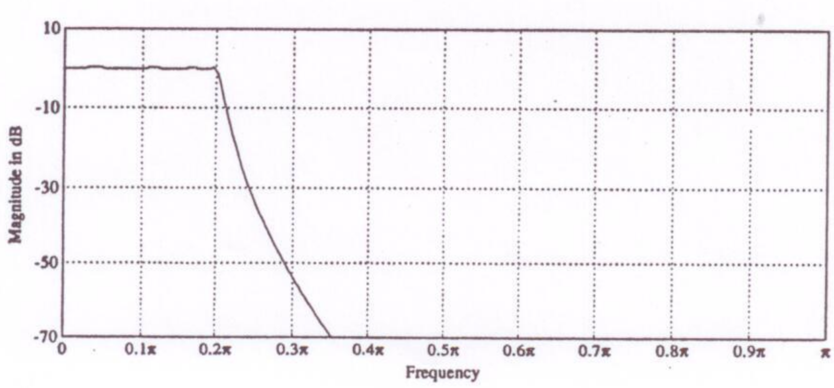
b) filtro elíptico : $N = 5$

Determina-se também a função de transferência $H(s)$, e finalmente,

$$G(z) = H(s)\Big|_{s = 2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$


Im(z)
Re(z)


10
-10
-30
-50
-70
Magnitude in dB
0
0.1π
0.2π
0.3π
0.4π
0.5π
0.6π
0.7π
0.8π
0.9π
π
Frequency


10
-10
-30
-50
-70
Magnitude in dB
0
0.1π
0.2π
0.3π
0.4π
0.5π
0.6π
0.7π
0.8π
0.9π
π
Frequency

Obtenção de G(z) usando MATLAB

$$G(z) = \frac{b(1) + b(2)z^{-1} + \dots + b(N+1)z^{-N}}{1 + a(2)z^{-1} + \dots + a(N+1)z^{-N}}$$

- Ordem

$[N, w_n] = \text{buttord}\,[w_p, w_r, \delta, A]$

$[N, w_n] = \text{cheb1ord}\,[w_p, w_r, \delta, A]$

$[N, w_n] = \text{cheb2ord}\,[w_p, w_r, \delta, A]$

$[N, w_n] = \text{ellipord}\,[w_p, w_r, \delta, A]$

- G(z)

$[b, a] = \text{butter}\,(N, w_n)$

$[b, a] = \text{cheby1}\,(N, \delta, w_n)$

$[b, a] = \text{cheby2}\,(N, A, w_n)$

$[b, a] = \text{ellip}\,(N, \delta, A, w_n)$