

OSCILADORES SENOÏDAIS

Duas técnicas principais são utilizadas para a geração de senoides:

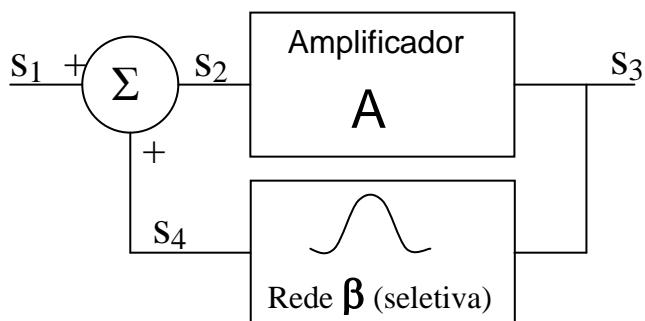
1) Osciladores lineares:

Consistem, basicamente, de um amplificador com realimentação positiva onde a rede β é um circuito seletivo (RC ou LC).

2) Conformadores de senóide:

A senóide é obtida pela conformação de uma onda triangular.

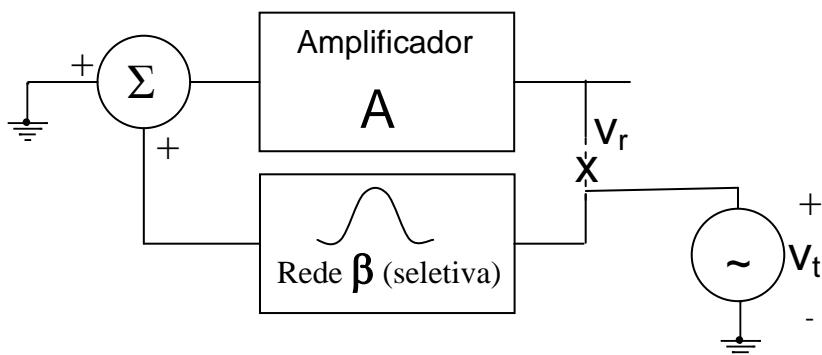
OSCILADORES SENOÏDAIS LINEARES



$$A_f(s) = \frac{A(s)}{1 - \beta(s)A(s)}$$

realimentação positiva

Ganho de malha (“loop gain”)



$$L(s) = \frac{V_r}{V_t} = \beta(s)A(s)$$

Critério de Barkhausen:

Para haver oscilação senoidal

$$\beta(j\omega_o)A(j\omega_o) = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |\beta A| = 1 \\ \angle \beta A = 0^\circ \end{cases}$$

“Na frequência de oscilação ω_o , o ganho de malha deve ter fase 0° e módulo unitário.”

Intuitivamente, se o sinal de retorno (V_r) for igual, em módulo e fase, ao sinal de transmissão (V_t), a saída V_o será sustentada mesmo sem a presença do sinal de entrada do amplificador.

$$L(j\omega_o) = \frac{V_r(j\omega_o)}{V_t(j\omega_o)} = 1 \quad (1.1)$$

Deve-se notar que a oscilação ocorre somente na frequência (ω_o) onde a fase do ganho de malha (βA) for 0° .

Seguindo este raciocínio intuitivo, se $L(j\omega_o) < 1$, a oscilação não se sustenta e se $L(j\omega_o) > 1$ a amplitude de V_r crescerá até que o amplificador entre na região de saturação, resultando numa senóide com distorção.

Uma visão alternativa para o estudo dos osciladores senoidais consiste na determinação dos pólos da função de transferência

$$A_f(s) = \frac{A(s)}{1 - \beta(s)A(s)} \quad (1.2)$$

Os pólos de $A_f(s)$ estão localizados nas raízes do polinômio do denominador da função de transferência (equação característica):

$$1 - \beta(s)A(s) = 0 \quad (1.3)$$

Por exemplo:

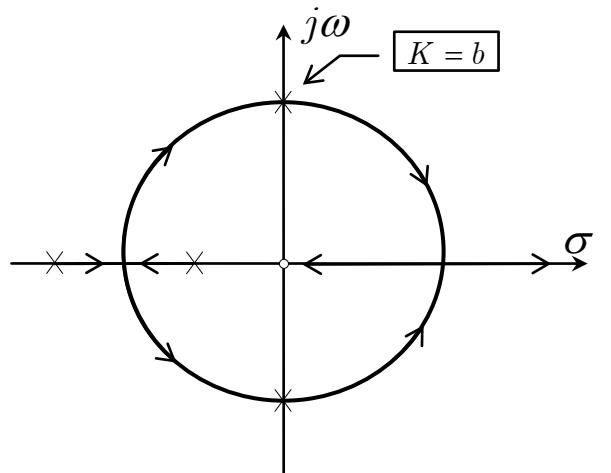
$$A(s) \equiv K \quad \text{e} \quad \beta(s) \equiv \frac{s}{s^2 + bs + 1}$$

$$1 - \beta(s)A(s) = 0$$

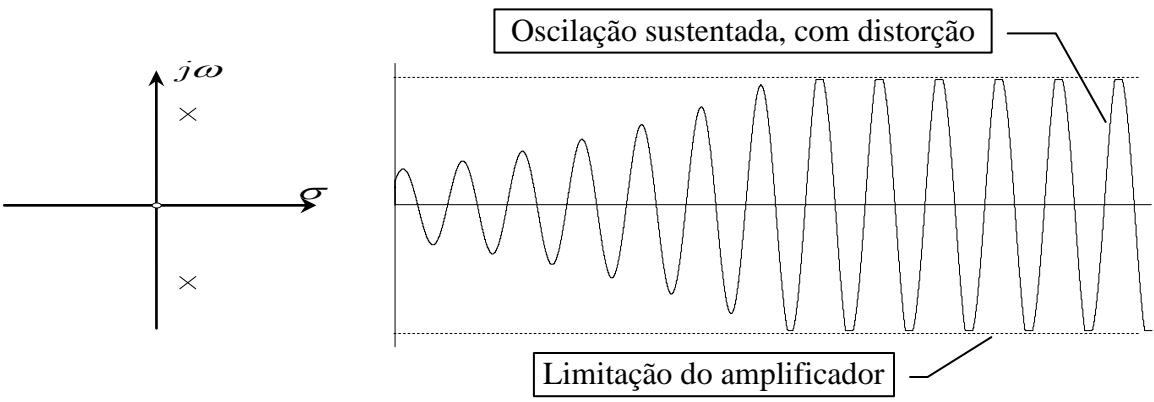
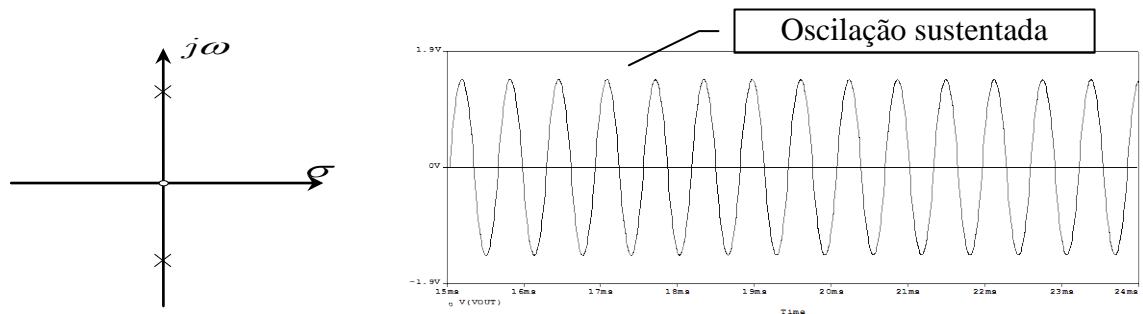
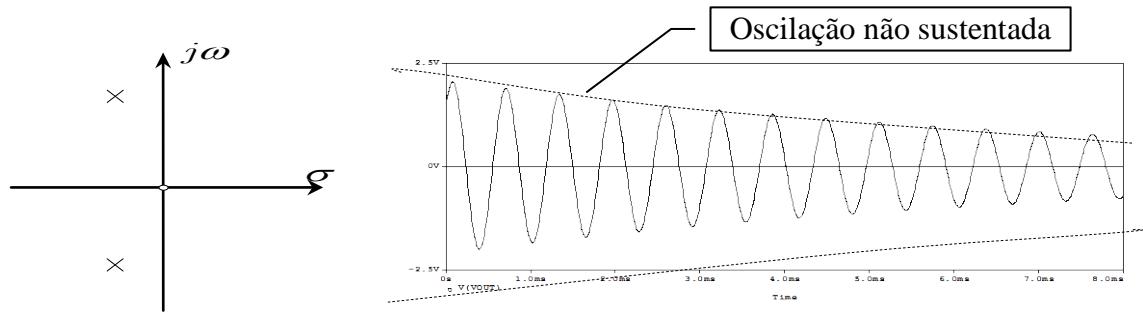
$$1 - K \frac{s}{s^2 + bs + 1} = 0$$

$$s^2 + bs + 1 - Ks = 0$$

$$s^2 + (b - K)s + 1 = 0 \quad (1.4)$$



Para que o circuito produza oscilações sustentadas na frequência ω_o , as raízes devem estar localizadas em $s = \pm j\omega_o$.



CONSIDERAÇÕES PRÁTICAS:

Para garantir oscilação senoidal as raízes do polinômio $1 - \beta(s)A(s)$ devem estar localizadas exatamente sobre o eixo $j\omega$. Significa dizer que ao longo do tempo $\beta(s)$ e $A(s)$ não podem sofrer alterações sob pena de parar de oscilar ou distorcer.

Sabemos que as características do circuito sofrem alterações por efeito de temperatura, envelhecimento, etc... Desta forma, para construir um oscilador senoidal devemos utilizar algum mecanismo de controle do ganho do amplificador.

São duas as preocupações básicas:

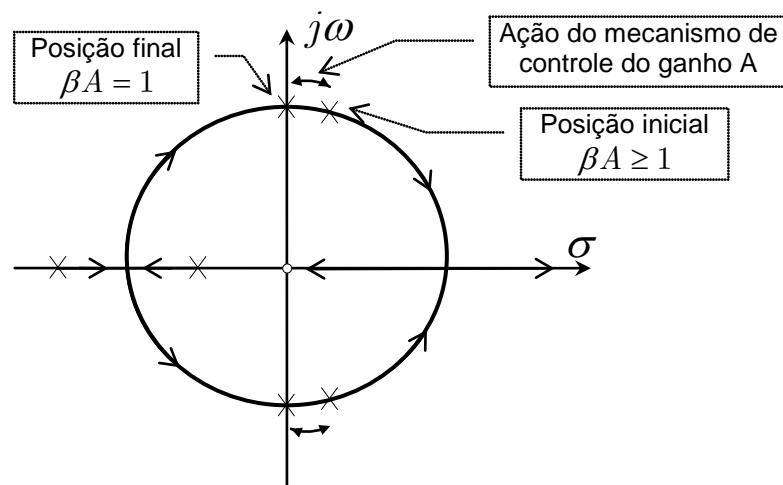
- 1) Garantir que o circuito sempre oscilará. Para isto, devemos garantir βA ligeiramente maior que a unidade na frequência ω_o . Isto posicionará os pólos no semiplano lateral direito (SLD) do plano complexo s.

$$\beta A > 1 \Rightarrow \text{oscilação garantida (com distorção)}$$

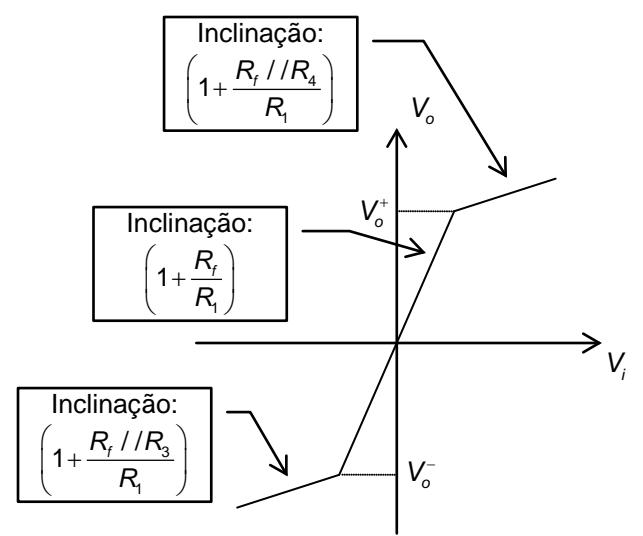
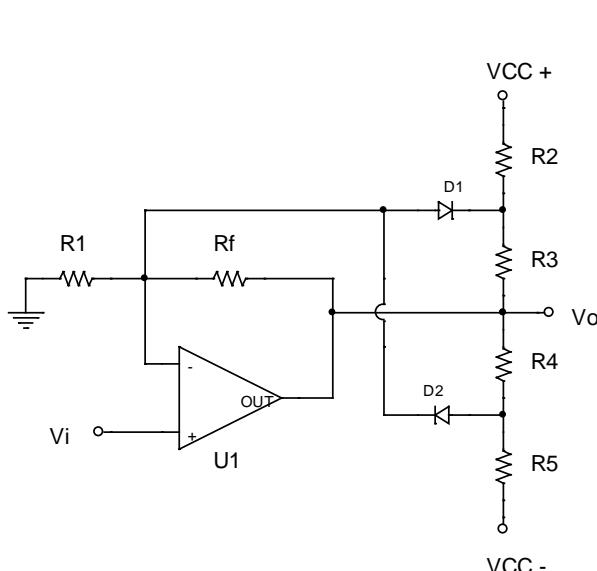
- 2) Garantir que $\beta A = 1$ quando a amplitude do sinal de saída atingir um valor desejado.

$$\beta A|_{v_o} = 1$$

Com esta técnica, os pólos são inicialmente posicionados no SLD do plano s, garantindo o processo de oscilação e, posteriormente, à medida que a amplitude do sinal de saída aumenta (em módulo), os pólos vão se deslocando, suavemente, na direção do eixo $j\omega$, evitando a distorção.



Um circuito de controle eficiente:



Para D₁ e D₂ cortados e aplicando superposição na determinação de V_A e V_B, tem-se:

$$A = \frac{V_o}{V_i} = 1 + \frac{R_f}{R_1}$$

$$V_A = V_{CC} \frac{R_3}{R_2 + R_3} + V_o \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

$$V_B = -V_{CC} \frac{R_4}{R_4 + R_5} + V_o \frac{R_5}{R_4 + R_5}$$

A situação de D₁ e D₂ cortados ocorre para baixas amplitudes de V_o. Com o aumento da amplitude ocorrerá a condução dos diodos D₁ e D₂, respectivamente nos semi-ciclos negativo e positivo, colocando R_f em paralelo com R₃ ou R₄ e, consequentemente forçando a redução do ganho. Os limites (V_o⁺ e V_o⁻) de condução de D₁ e D₂ são dados pelas expressões:

D₁ conduz:

$$V_A = V_i - V_D \Rightarrow V_A = \frac{V_o^-}{A} - V_D$$

D₂ conduz:

$$V_B = V_i + V_D \Rightarrow V_B = \frac{V_o^+}{A} + V_D$$

Assim:

$$V_A = \frac{V_o^-}{A} - V_D = \left[V_{CC} \frac{R_3}{R_2 + R_3} + V_o \frac{R_2}{R_2 + R_3} \right]$$

$$V_o^- \left(\frac{R_2}{R_2 + R_3} - \frac{1}{A} \right) = - \left(V_{CC} \frac{R_3}{R_2 + R_3} + V_D \right)$$

Fazendo :

$$k = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \Rightarrow (1 - k) = \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

Vem:

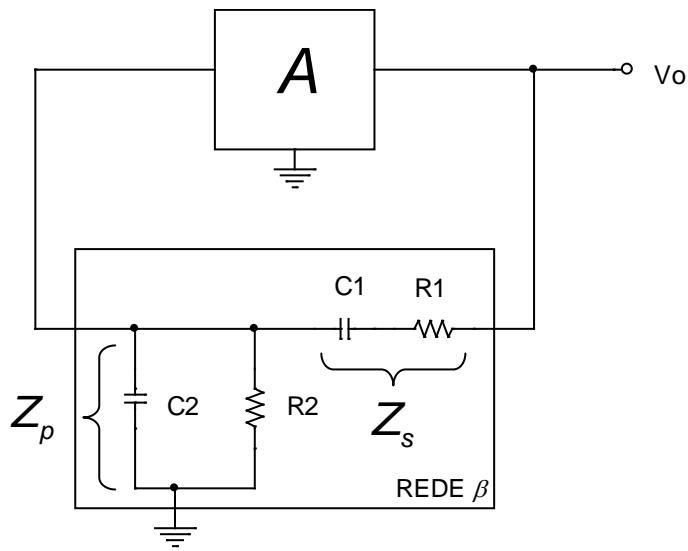
$$V_o^- = -\frac{A}{A(1-k)-1} (kV_{CC} + V_D)$$

Analogamente:

$$V_o^+ = -\frac{A}{A(1-k)-1} (kV_{CC} + V_D) \quad \text{onde, } k = \frac{R_4}{R_4 + R_5}$$

OBS.: Como a curva de condução do diodo é exponencial, as transições em torno de V_o^+ e V_o^- são suaves, contribuindo para a redução da distorção.

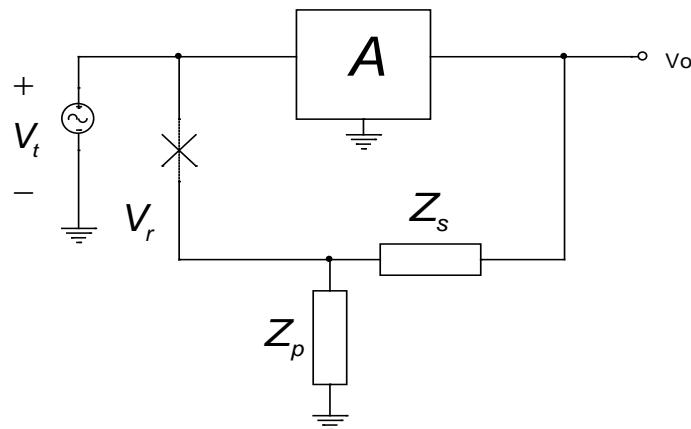
OSCILADOR EM PONTE DE WIEN



$$Z_s = R_1 + \frac{1}{sC_1} = \frac{sR_1C_1 + 1}{sC_1}$$

$$Z_p = R_2 // \frac{1}{sC_2} = \frac{R_2}{sR_2C_2 + 1}$$

Cálculo de βA :



$$V_r = A \frac{Z_p}{Z_p + Z_s} V_t$$

$$\beta A = \frac{V_r}{V_t} = A \frac{Z_p}{Z_p + Z_s}$$

$$\beta A = A \frac{\frac{R_2}{sR_2C_2 + 1}}{\frac{sR_1C_1 + 1}{sC_1} + \frac{R_2}{sR_2C_2 + 1}} = A \frac{\frac{R_2}{sR_2C_2 + 1}}{(sR_1C_1 + 1)(sR_2C_2 + 1) + sR_2C_1}$$

$$\beta A = A \frac{sR_2C_1}{s^2R_1R_2C_1C_2 + sR_1C_1 + sR_2C_2 + 1 + sR_2C_1}$$

$$\beta A = A \frac{1}{sR_1C_2 + \frac{1}{sR_2C_1} + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + 1}$$

Aplicando o critério de Barkhausen:

Para $s = j\omega_o$

$$\beta A = A \frac{1}{j\left(\omega_o R_1 C_2 - \frac{1}{\omega_o R_2 C_1}\right) + \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + 1\right)}$$

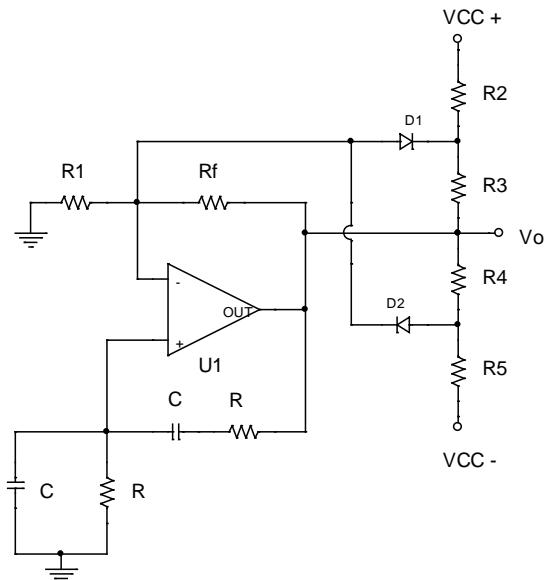
$$\angle \beta A = 0^\circ$$

$$\omega_o R_1 C_2 - \frac{1}{\omega_o R_2 C_1} = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_o = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}}$$

Nesta frequência, onde a $\angle \beta A = 0^\circ$, tem-se a condição de oscilação:

$$|\beta A|_{\omega=\omega_o} = A \frac{1}{\left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + 1\right)} = 1 \Rightarrow \boxed{A = 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}}$$

Usando o amplificador com ganho controlado pela amplitude do sinal de saída:



$$\omega_o = \frac{1}{RC}$$

$$A = 1 + \frac{R_f}{R_1} = 3 + \delta$$

p.ex.:

$$\delta = 0,03A$$

Análise alternativa

Usando, por simplicidade, $R_1 = R_2 = R$ e $C_1 = C_2 = C$, vem:

$$\beta(s)A(s) = \frac{AsRC}{s^2R^2C^2 + s(3RC) + 1}$$

Calculando as raízes de $1 - \beta(s)A(s) = 0$

$$1 - \beta(s)A(s) = 1 - \frac{AsRC}{s^2R^2C^2 + s(3RC) + 1} = \frac{s^2R^2C^2 + s(3 - A)RC + 1}{s^2R^2C^2 + s(3RC) + 1} = 0$$

$$s^2R^2C^2 + s(3 - A)RC + 1 = 0$$

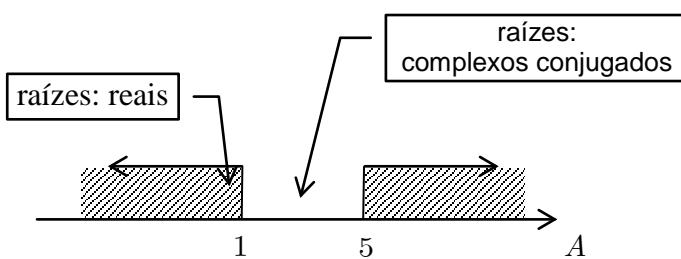
$$s = \frac{-(3 - A)RC \pm \sqrt{(3 - A)^2 R^2 C^2 - 4R^2 C^2}}{2R^2 C^2} = \frac{1}{2RC} \left[-(3 - A) \pm \sqrt{(3 - A)^2 - 4} \right]$$

raízes: reais

$$(3 - A)^2 - 4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad A^2 - 6A + 9 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 1 & \Rightarrow \quad s_1 = -\frac{1}{RC} \\ A = 5 & \Rightarrow \quad s_2 = \frac{1}{RC} \end{cases}$$

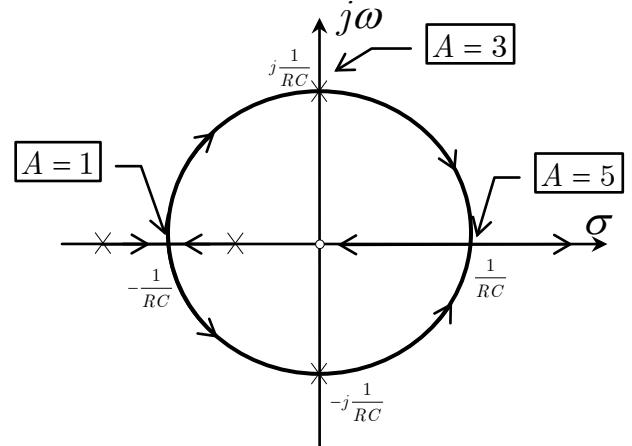
raízes: complexos conjugados:

$$1 < A < 5$$

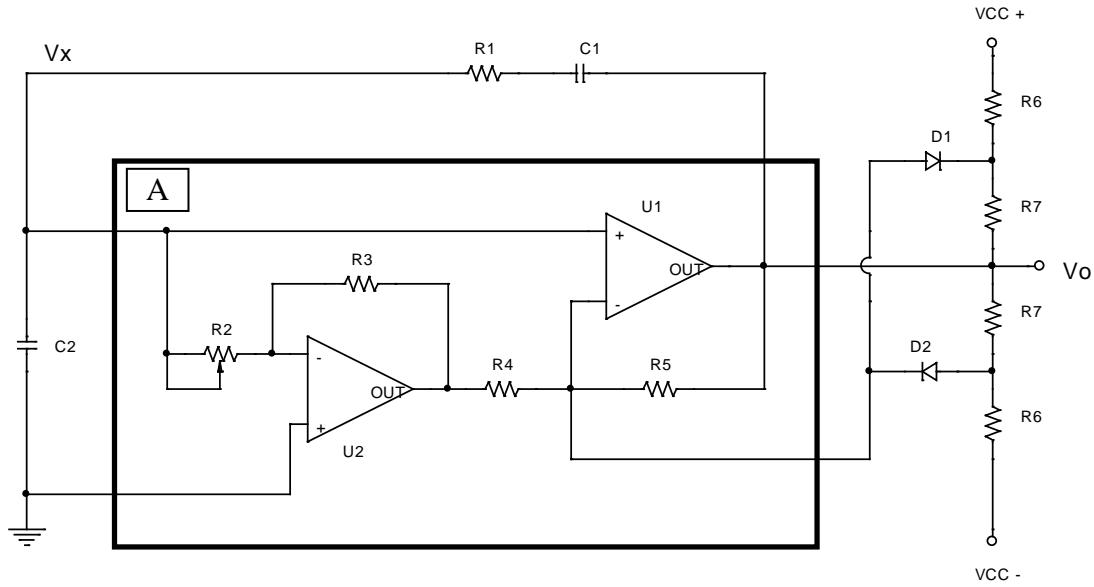


raízes: sobre o eixo imaginário:

$$A = 3 \quad \Rightarrow \quad s = \pm j \frac{1}{RC}$$



Oscilador em ponte de Wien com controle de frequência.



Observe que o caminho de realimentação positiva é o que passa pela associação em série de R_1 e C_1 e a impedância de entrada R_2 , do amplificador A, é a impedância vista por C_2 formando a ponte de Wien. Desta forma, esta estrutura apresenta a mesma frequência e condição de oscilação da estrutura analisada anteriormente:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad e \quad A = 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}$$

Entretanto, a estrutura do amplificador é diferente e, consequentemente, o ganho A_v será diferente. O sinal que chega em v_x é amplificado passando por dois caminhos distintos. Assim, o sinal de saída v_o pode ser obtido aplicando-se superposição, Isto é, o sinal de saída será a soma das contribuições de v_x amplificadas em cada um dos caminhos:

$$v_o = v_x \left(1 + \frac{R_5}{R_4} \right) + v_x \left(-\frac{R_3}{R_2} \right) \left(-\frac{R_5}{R_4} \right)$$

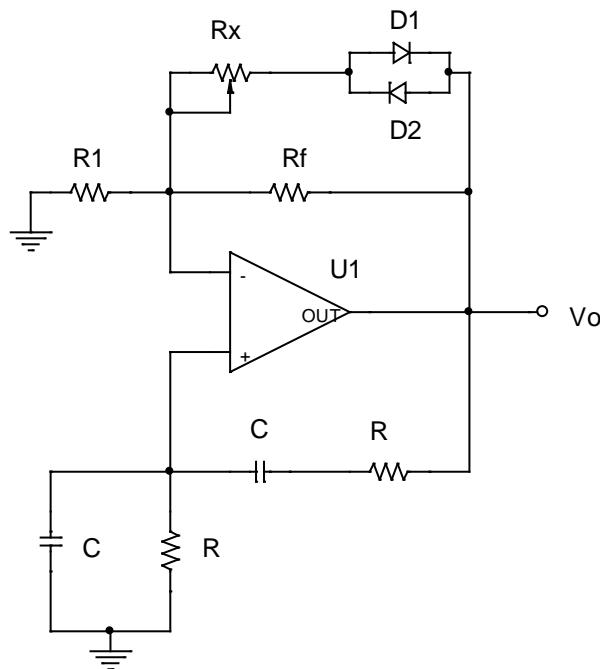
$$A_v = \frac{v_o}{v_x} = 1 + \frac{R_3}{R_2} \frac{R_5}{R_4} + \frac{R_5}{R_4}$$

Por inspeção, verificamos que a escolha conveniente de R_3 , R_4 e R_5 fará com que o ganho A_v ajustado no amplificador seja sempre igual ao ganho A da condição de oscilação,

para qualquer valor de R_2 . Assim, variando R_2 , a condição de oscilação é mantida enquanto a frequência de oscilação varia, desde que os componentes sejam ajustados seguindo o critério:

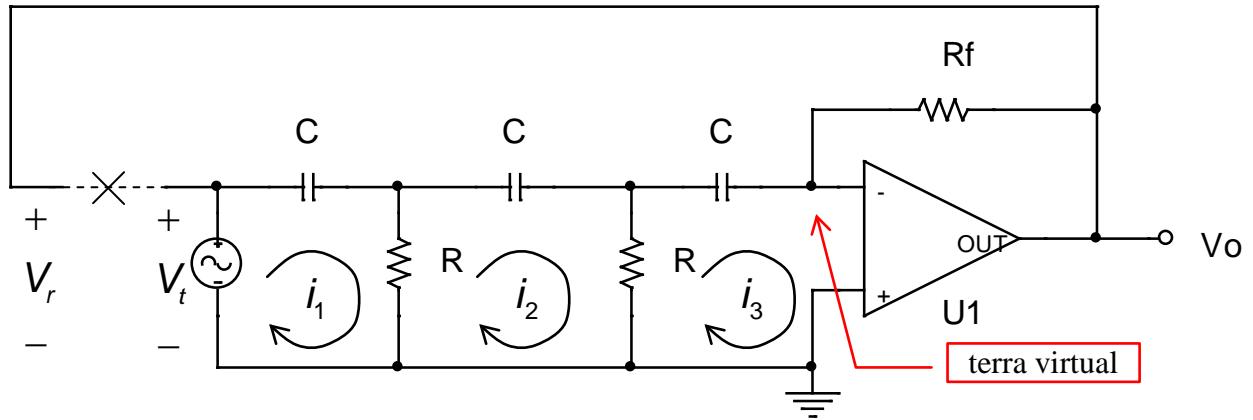
$$\frac{R_5}{R_4} = \frac{C_2}{C_1} \quad e \quad R_3 \frac{R_5}{R_4} = R_1$$

Oscilador em ponte de Wien com controle de amplitude alternativo.



Neste circuito, a tensão instantânea sobre R_f depende da amplitude de v_o . Os diodos só começam a conduzir quando esta tensão for maior que v_d ($\approx 0,6V$). A partir desta amplitude, o resistor R_x , em série com a resistência dinâmica do diodo, é colocado em paralelo com o resistor R_f , reduzindo o ganho do amplificador, limitando a amplitude do sinal de saída no valor ajustado através de R_x .

Oscilador por desvio de fase (“phase shift oscillator”)



Para verificar a frequência e condição de oscilação desta estrutura, devemos abrir a malha de realimentação positiva e determinar a função de transferência $A(s)\beta(s)$ e aplicar o critério de Barkhausen. Observando o circuito, vemos que existem dois ramos de realimentação e ambos conduzem sinal realimentado para a entrada (-) do amplificador operacional, o que caracterizaria a existência, somente, de realimentação negativa. Entretanto, a rede RC do outro ramo de realimentação provoca um desvio na fase do sinal realimentado. Desta forma, em determinadas condições a serem determinadas, por esta malha, o critério de Barkhausen pode ser atendido, fazendo com que o circuito oscile. Para esta análise, a malha que deve ser aberta para determinação da frequência e condição de oscilação é a malha que contém a rede RC.

Interrompendo o circuito conforme indicado na figura e aplicando um sinal V_t , a função de transferência $A(s)\beta(s)$ pode ser obtida utilizando o método das malhas para análise de circuitos:

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{sC} + R & -R & v_t \\ -R & \frac{1}{sC} + 2R & 0 \\ 0 & -R & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{sC} + R & -R & 0 \\ -R & \frac{1}{sC} + 2R & -R \\ 0 & -R & \frac{1}{sC} + R \end{vmatrix}} = \frac{R^2 v_t}{\left(\frac{1}{sC} + R\right)^2 \left(\frac{1}{sC} + 2R\right) - 2R^2 \left(\frac{1}{sC} + R\right)}$$

$$v_r = -i_3 R_f = -\frac{s^3 R^2 C^3 R_f}{3(sRC)^2 + 4sRC + 1} v_t = -\frac{s^2 R C^2 R_f}{3sRC + \frac{1}{sRC} + 4} v_t$$

Aplicando o critério de Baerkhausen:

$$\text{para: } s = j\omega_o$$

$$\beta A = \frac{v_r}{v_t} = \frac{w_o^2 R C^2 R_f}{j \left(3w_o R C - \frac{1}{w_o R C} \right) + 4}$$

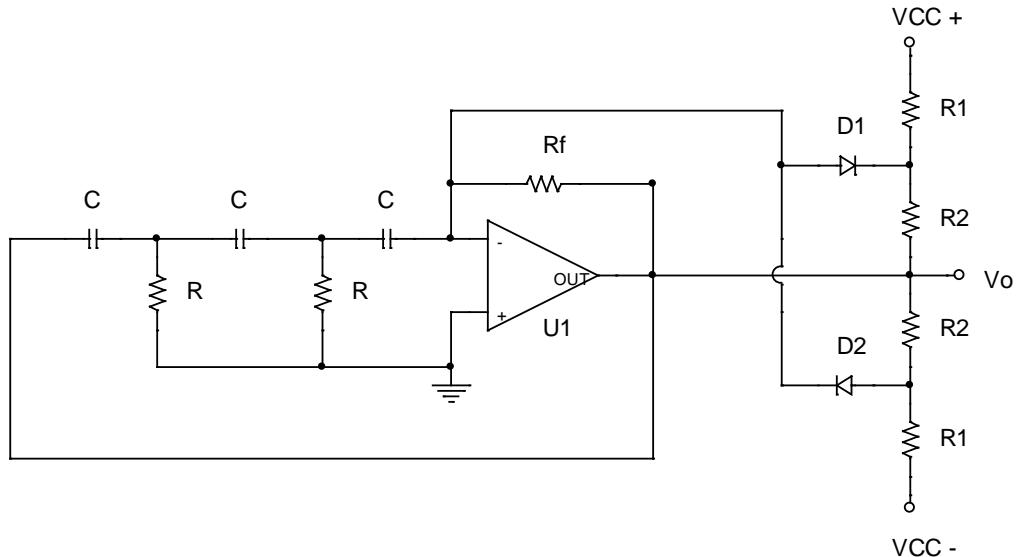
$$\Leftrightarrow \beta A = 0$$

$$3w_o R C - \frac{1}{w_o R C} = 0 \Rightarrow w_o^2 = \frac{1}{3(RC)^2} \Rightarrow \boxed{w_o = \frac{1}{\sqrt{3}RC}}$$

Na frequência ω_o tem-se a condição de oscilação:

$$|\beta A|_{w=w_o} = \frac{w_o^2 R C^2 R_f}{4} = 1 \Rightarrow R_f = \frac{4}{w_o^2 R C^2} = \frac{4}{\frac{1}{3(RC)^2} R C^2} \Rightarrow \boxed{R_f = 12R}$$

Usando o controle de ganho no amplificador:

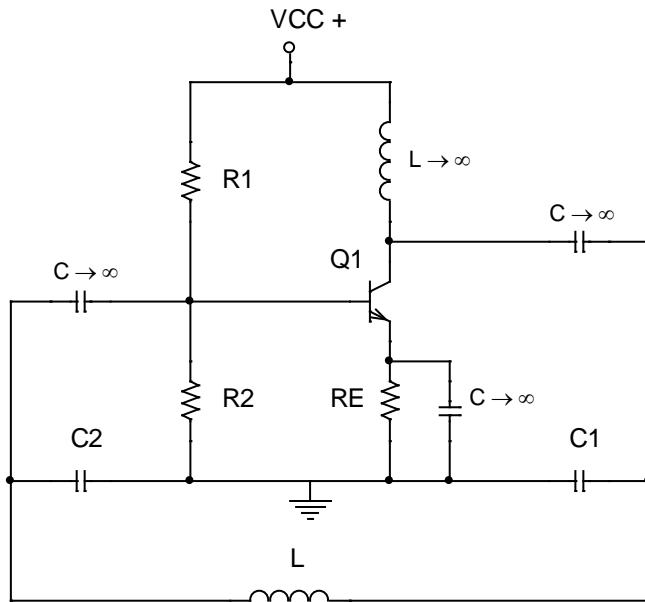


OSCILADORES LC

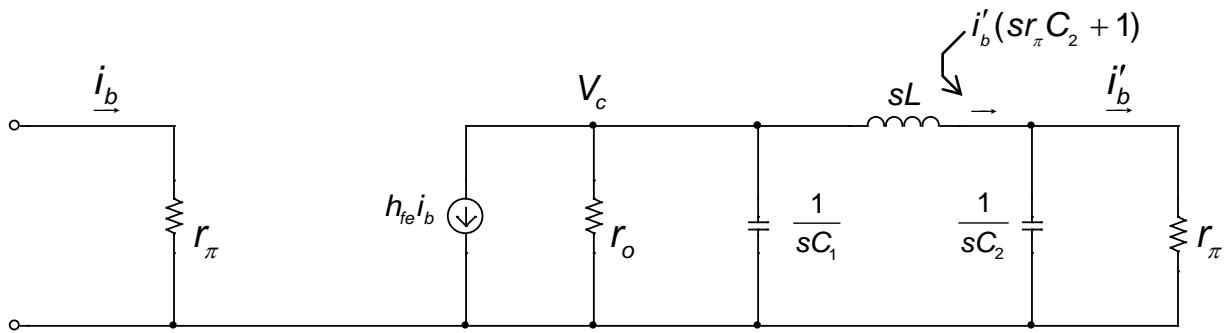
Oscilador Colpitts

Considerar:

$$R_B = R_1 // R_2 \gg r_\pi$$



Círculo equivalente para o cálculo do ganho de malha (βA):



Aplicando lei de Kirchoff no coletor ($\Sigma i = 0$):

$$i'_b(sr_{\pi}C_2 + 1) + h_{fe}i_b + \frac{V_c}{r_o / / \left(\frac{1}{sC_1} \right)} = 0$$

$$i'_b(sr_\pi C_2 + 1) + h_{fe}i_b + \frac{i'_b[(sr_\pi C_2 + 1)sL + r_\pi]}{1 - \left(\frac{1}{r_o} + sC_1\right)} = 0$$

$$i'_b(sr_\pi C_2 + 1) + h_{fe} i_b + i'_b [(sr_\pi C_2 + 1)sL + r_\pi] \cdot \left(\frac{1}{r_o} + sC_1 \right) = 0$$

$$\beta A = \frac{i'_b}{i_b} = \frac{-h_{fe}}{(sr_\pi C_2 + 1) + [(sr_\pi C_2 + 1)sL + r_\pi] \left(\frac{1}{r_o} + sC_1 \right)}$$

$$\beta A = \frac{i'_b}{i_b} = \frac{-h_{fe}}{(sr_\pi C_2 + 1) + (s^2 LC_2 r_\pi + sL + r_\pi) \left(\frac{1}{r_o} + sC_1 \right)}$$

$$\beta A = \frac{i'_b}{i_b} = \frac{-h_{fe}}{sr_\pi C_2 + 1 + s^2 LC_2 \frac{r_\pi}{r_o} + s^3 LC_1 C_2 r_\pi + \frac{sL}{r_o} + s^2 LC_1 + \frac{r_\pi}{r_o} + sr_\pi C_1}$$

$$\beta A = \frac{i'_b}{i_b} = \frac{-h_{fe}}{s^3 LC_1 C_2 r_\pi + s^2 \left(LC_2 \frac{r_\pi}{r_o} + LC_1 \right) + s \left(r_\pi C_2 + \frac{L}{r_o} + r_\pi C_1 \right) + \frac{r_\pi}{r_o} + 1}$$

Para $s = j\omega_o$

$$\beta A = \frac{i'_b}{i_b} = \frac{-h_{fe}}{-j\omega_o^3 LC_1 C_2 r_\pi - \omega_o^2 \left(LC_2 \frac{r_\pi}{r_o} + LC_1 \right) + j\omega_o \left(r_\pi C_2 + \frac{L}{r_o} + r_\pi C_1 \right) + \frac{r_\pi}{r_o} + 1}$$

$$\beta A = \frac{i'_b}{i_b} = \frac{-h_{fe}}{j \left[\omega_o \left(r_\pi C_2 + \frac{L}{r_o} + r_\pi C_1 \right) - \omega_o^3 LC_1 C_2 r_\pi \right] - \omega_o^2 \left(LC_2 \frac{r_\pi}{r_o} + LC_1 \right) + \frac{r_\pi}{r_o} + 1}$$

Aplicando o critério de Barkhausen:

$$\angle \beta A = 0$$

$$\mathcal{M}_o \left(r_{\pi} C_2 + \frac{L}{r_o} + r_{\pi} C_1 \right) = \omega_o^3 L C_1 C_2 r_{\pi}$$

$$\omega_o^2 = \frac{\left(r_{\pi} C_2 + \frac{L}{r_o} + r_{\pi} C_1 \right)}{L C_1 C_2 r_{\pi}} \Rightarrow \omega_o^2 = \frac{1}{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} + \frac{1}{C_1 C_2 r_{\pi} r_o}$$

Fazendo:

$$L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \ll C_1 C_2 r_{\pi} r_o \Rightarrow \frac{L}{C_1 + C_2} \ll r_{\pi} r_o$$

$$\omega_o^2 \cong \frac{1}{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} = \frac{1}{L C_{eq}} \Rightarrow \boxed{\omega_o \cong \frac{1}{\sqrt{L C_{eq}}}}$$

$$|\beta A|_{\omega=\omega_o} = 1$$

$$|\beta A| = \left| \frac{-h_{fe}}{-\omega_o^2 \left(L C_2 \frac{r_{\pi}}{r_o} + L C_1 \right) + \frac{r_{\pi}}{r_o} + 1} \right| = \left| \frac{-h_{fe}}{-\frac{1}{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} \left(L C_2 \frac{r_{\pi}}{r_o} + L C_1 \right) + \frac{r_{\pi}}{r_o} + 1} \right| = 1$$

$$|\beta A| = \left| \frac{-h_{fe}}{-\frac{C_1 + C_2}{C_1} \frac{r_{\pi}}{r_o} - \frac{C_1 + C_2}{C_2} + \frac{r_{\pi}}{r_o} + 1} \right| = \left| \frac{-h_{fe}}{-\left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) \frac{r_{\pi}}{r_o} - \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right) + \frac{r_{\pi}}{r_o} + 1} \right| = 1$$

$$|\beta A| = \left| \begin{array}{c} -h_{fe} \\ -\frac{C_2}{C_1} \frac{r_\pi}{r_o} - \frac{C_1}{C_2} \end{array} \right| = \frac{h_{fe}}{\frac{C_2}{C_1} \frac{r_\pi}{r_o} + \frac{C_1}{C_2}} = 1$$

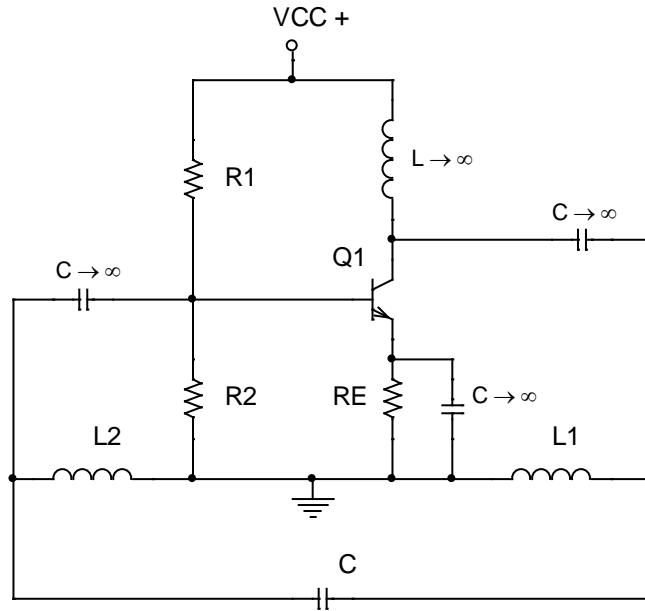
Na prática:

$$h_{fe} > \frac{C_2}{C_1} \frac{r_\pi}{r_o} + \frac{C_1}{C_2}$$

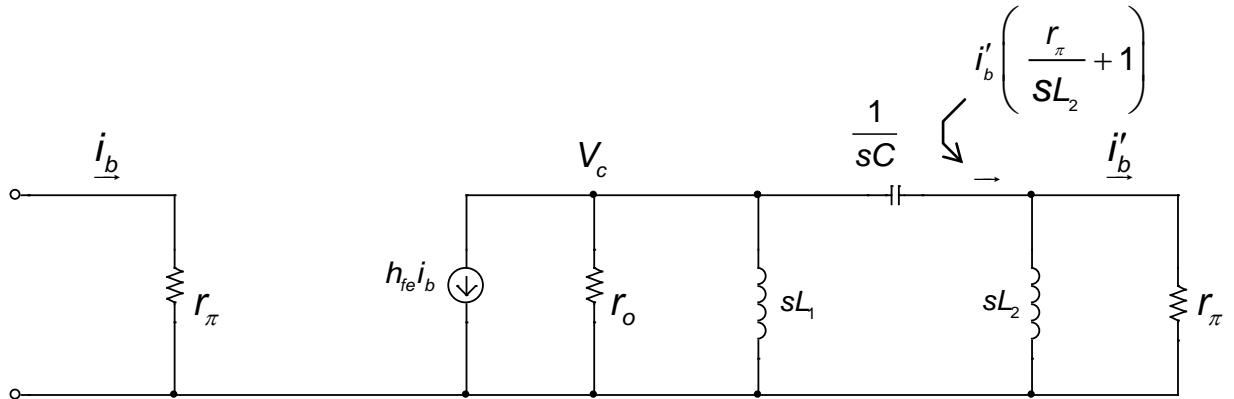
Oscilador Hartley

Considerar:

$$R_B = R_1 // R_2 \gg r_\pi$$



Círculo equivalente para o cálculo do ganho de malha (βA):



Aplicando lei de Kirchoff no coletor ($\sum i = 0$):

$$i'_b \left(\frac{r_\pi}{sL_2} + 1 \right) + h_{fe} i_b + \frac{V_c}{r_o // (sL_1)} = 0$$

$$i'_b \left(\frac{r_\pi}{sL_2} + 1 \right) + h_{fe} i_b + \frac{i'_b \left[\left(\frac{r_\pi}{sL_2} + 1 \right) \frac{1}{sC} + r_\pi \right]}{\left(\frac{1}{r_o} + \frac{1}{sL_1} \right)} = 0$$

$$i'_b \left(\frac{r_\pi}{sL_2} + 1 \right) + h_{fe} i_b + i'_b \left[\left(\frac{r_\pi}{sL_2} + 1 \right) \frac{1}{sC} + r_\pi \right] \cdot \left(\frac{1}{r_o} + \frac{1}{sL_1} \right) = 0$$

$$\beta A = \frac{i'_b}{i_b} = \frac{-h_{fe}}{\left(\frac{r_\pi}{sL_2} + 1 \right) + \left[\left(\frac{r_\pi}{sL_2} + 1 \right) \frac{1}{sC} + r_\pi \right] \cdot \left(\frac{1}{r_o} + \frac{1}{sL_1} \right)}$$

$$\beta A = \frac{i'_b}{i_b} = \frac{-h_{fe}}{\left(\frac{sL_2 + r_\pi}{sL_2} \right) + \left[\frac{sL_2 + r_\pi}{s^2 L_2 C} + r_\pi \right] \cdot \left(\frac{sL_1 + r_o}{s r_o L_1} \right)}$$

$$\beta A = \frac{i'_b}{i_b} = \frac{-h_{fe}}{\left(\frac{sL_2 + r_\pi}{sL_2} \right) + \left[\frac{(s^2 r_\pi L_2 C + sL_2 + r_\pi)(sL_1 + r_o)}{s^3 r_o L_1 L_2 C} \right]}$$

$$\beta A = \frac{i'_b}{i_b} = \frac{-h_{fe} (s^3 r_o L_1 L_2 C)}{(s^3 r_o L_1 L_2 C + s^2 r_\pi r_o L_1 C) + (s^3 r_\pi L_1 L_2 C + s^2 L_1 L_2 + s r_\pi L_1 + s^2 r_\pi r_o L_2 C + s r_o L_2 + r_\pi r_o)}$$

$$\beta A = \frac{i'_b}{i_b} = \frac{-h_{fe} (s^3 r_o L_1 L_2 C)}{s^3 (r_o + r_\pi) L_1 L_2 C + s^2 (L_1 L_2 + r_\pi r_o L_1 C + r_\pi r_o L_2 C) + s (r_\pi L_1 + r_o L_2) + r_\pi r_o}$$

$$\beta A = \frac{i'_b}{i_b} = \frac{-h_{fe} (s^{\beta^2} r_o L_1 L_2 C)}{s^{\beta^2} (r_o + r_\pi) L_1 L_2 C + s^{\beta^2} (L_1 L_2 + r_\pi r_o L_1 C + r_\pi r_o L_2 C) + s (r_\pi L_1 + r_o L_2) + \frac{r_\pi r_o}{s}}$$

Para $s = j\omega_o$

$$\beta A = \frac{i'_b}{i_b} = \frac{-h_{fe} (-\omega_o^2 r_o L_1 L_2 C)}{-\omega_o^2 (r_o + r_\pi) L_1 L_2 C + j\omega_o (L_1 L_2 + r_\pi r_o L_1 C + r_\pi r_o L_2 C) + (r_\pi L_1 + r_o L_2) - j \frac{r_\pi r_o}{\omega_o}}$$

$$\beta A = \frac{i'_b}{i_b} = \frac{-h_{fe}(-\omega_o^2 r_o L_1 L_2 C)}{-\omega_o^2 (r_o + r_\pi) L_1 L_2 C + (r_\pi L_1 + r_o L_2) + j \left(\omega_o (L_1 L_2 + r_\pi r_o L_1 C + r_\pi r_o L_2 C) - \frac{r_\pi r_o}{\omega_o} \right)}$$

Aplicando o critério de Barkhausen:

$$\angle \beta A = 0$$

$$\omega_o (L_1 L_2 + r_\pi r_o L_1 C + r_\pi r_o L_2 C) = \frac{r_\pi r_o}{\omega_o}$$

$$\omega_o^2 = \frac{r_\pi r_o}{L_1 L_2 + r_\pi r_o L_1 C + r_\pi r_o L_2 C} \Rightarrow \omega_o^2 = \frac{1}{(L_1 + L_2)C + \frac{L_1 L_2}{r_\pi r_o}}$$

Fazendo:

$$(L_1 + L_2)C \gg \frac{L_1 L_2}{r_\pi r_o} \Rightarrow \frac{L_1 L_2}{(L_1 + L_2)C} \ll r_\pi r_o$$

$$\omega_o^2 \approx \frac{1}{(L_1 + L_2)C} = \frac{1}{L_{eq}C} \Rightarrow \boxed{\omega_o \approx \frac{1}{\sqrt{L_{eq}C}}}$$

$$|\beta A|_{\omega=\omega_o} = 1$$

$$|\beta A| = \left| \frac{-h_{fe}(-\omega_o^2 r_o L_1 L_2 C)}{-\omega_o^2 (r_o + r_\pi) L_1 L_2 C + (r_\pi L_1 + r_o L_2)} \right| = \left| \frac{-h_{fe} r_o}{r_o + r_\pi - \left(\frac{r_\pi L_1 + r_o L_2}{\omega_o^2 L_1 L_2 C} \right)} \right| = 1$$

$$|\beta A| = \left| \frac{-h_{fe}r_o}{r_o + r_\pi - \left(\frac{r_\pi L_1 + r_o L_2}{\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}} \right)} \right| = \left| \frac{-h_{fe}r_o}{r_o + r_\pi - \left(1 + \frac{L_2}{L_1} \right) r_\pi - \left(1 + \frac{L_1}{L_2} \right) r_o} \right| = 1$$

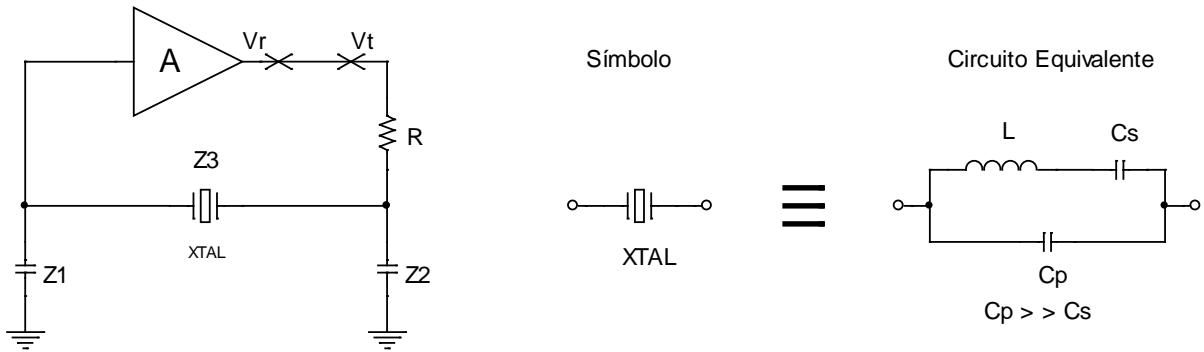
$$|\beta A| = \left| \frac{-h_{fe}r_o}{r_o + r_\pi - \left(1 + \frac{L_2}{L_1} \right) r_\pi - \left(1 + \frac{L_1}{L_2} \right) r_o} \right| = \left| \frac{-h_{fe}r_o}{-\frac{L_2}{L_1}r_\pi - \frac{L_1}{L_2}r_o} \right| = 1$$

$$h_{fe}r_o = +\frac{L_2}{L_1}r_\pi + \frac{L_1}{L_2}r_o \Rightarrow h_{fe} = \frac{L_1}{L_2} + \frac{L_2}{L_1}r_\pi$$

Na prática:

$$h_{fe} > \frac{L_1}{L_2} + \frac{L_2 r_\pi}{L_1 r_o}$$

OSCILADOR A CRISTAL



$$Z_3(s) = \frac{1}{sC_p + \frac{1}{sL + \frac{1}{sC_s}}} = \frac{1}{sC_p + \frac{sC_s}{s^2LC_s + 1}} = \frac{s^2LC_s + 1}{s^3LC_sC_p + s(C_p + C_s)} = \frac{1}{sC_p} \cdot \frac{s^2 + \frac{1}{LC_s}}{s^2 + \frac{(C_s + C_p)}{LC_sC_p}}$$

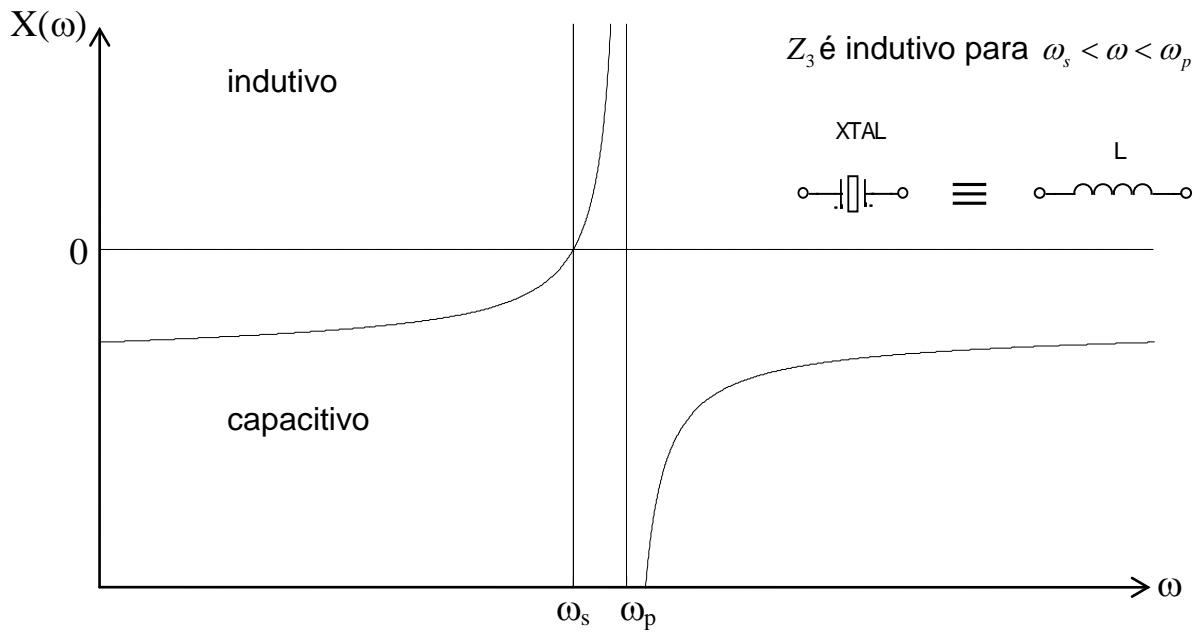
$$s = j\omega$$

$$Z_3(j\omega) = -j \frac{1}{\omega C_p} \cdot \frac{\omega^2 - \frac{1}{LC_s}}{\omega^2 - \frac{(C_s + C_p)}{LC_sC_p}}$$

$$Z_3(j\omega) = -j \frac{1}{\omega C_p} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_s^2}{\omega^2 - \omega_p^2} \quad \text{onde: } \left\{ \begin{array}{l} \omega_s^2 = \frac{1}{LC_s} \\ \omega_p^2 = \frac{1}{L \frac{C_s C_p}{(C_s + C_p)}} \end{array} \right\} \quad \text{como } C_p \gg C_s \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_p > \omega_s \\ \omega_p \approx \omega_s \end{array} \right.$$

Pode-se observar que $Z_3(j\omega) = jX(\omega)$. A reatância $X(\omega)$ é indutiva na faixa $\omega_s < \omega < \omega_p$. Então, nesta faixa de frequência, o cristal se comporta como um indutor, e o circuito se torna um oscilador Colpitts.

Curva de reatância do cristal:



Calculando-se βA , obtém-se:

$$\beta A = \frac{v_r}{v_t} = \frac{AZ_1Z_2}{R(Z_1 + Z_2 + Z_3) + Z_2(Z_1 + Z_3)}$$

Considerando $Z_1 = \frac{1}{j\omega C_1}$ e $Z_2 = \frac{1}{j\omega C_2}$, temos para a frequência $\omega = \omega_o$:

$$\beta A = \frac{-A \frac{1}{\omega_o^2 C_1 C_2}}{jR \left[-\frac{1}{\omega_o C_1} - \frac{1}{\omega_o C_2} - \frac{1}{\omega_o C_p} \left(\frac{\omega_o^2 - \omega_s^2}{\omega_o^2 - \omega_p^2} \right) \right] + \frac{1}{\omega_o C_2} \left[-\frac{1}{\omega_o C_1} - \frac{1}{\omega_o C_p} \left(\frac{\omega_o^2 - \omega_s^2}{\omega_o^2 - \omega_p^2} \right) \right]}$$

Aplicando o critério de Barkhausen:

$$\angle \beta A = 0$$

$$\frac{1}{\cancel{\cancel{C}_1}} + \frac{1}{\cancel{\cancel{C}_2}} + \frac{1}{\cancel{\cancel{C}_p}} \left(\frac{\omega_o^2 - \omega_s^2}{\omega_o^2 - \omega_p^2} \right) = 0$$

Explicitando ω_o^2 , vem:

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC_s} \left[1 + \frac{C_s}{C_p + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} \right] , \text{ como } C_p \gg C_s \quad \boxed{\omega_o^2 \simeq \frac{1}{LC_s}}$$

$$|\beta A| = 1$$

$$\beta A = \frac{-A \frac{1}{\cancel{\cancel{C}_1} \cancel{\cancel{C}_2}}}{\frac{1}{\cancel{\cancel{C}_2}} \left[-\frac{1}{\cancel{\cancel{C}_1}} - \frac{1}{\cancel{\cancel{C}_p}} \left(\frac{\omega_o^2 - \omega_s^2}{\omega_o^2 - \omega_p^2} \right) \right]} = 1$$

$$A \frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_p} \left(\frac{\omega_o^2 - \omega_s^2}{\omega_o^2 - \omega_p^2} \right) \Rightarrow A = 1 + \frac{C_1}{C_p} \left(\frac{\omega_o^2 - \omega_s^2}{\omega_o^2 - \omega_p^2} \right)$$

como $\omega_p \approx \omega_s$, então:

$$A = 1 + \frac{C_1}{C_p} \left(\frac{\omega_o^2 - \omega_s^2}{\omega_o^2 - \omega_p^2} \right)^{(\approx 1)} \Rightarrow \boxed{A = -\left(\frac{C_1}{C_p} - 1 \right)}$$