

# Sumário

<b>1</b>	<b>Realimentação de Estados</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução . . . . .	1
1.2	Idéias Básicas . . . . .	1
1.3	Sistemas Com Apenas Uma Entrada . . . . .	6
1.3.1	Método da Força Bruta . . . . .	6
1.3.2	Forma Canônica Controlável . . . . .	9
1.3.3	Duas Fórmulas Úteis . . . . .	17
1.3.4	Comentários . . . . .	24
1.4	Sistemas Com Várias Entradas . . . . .	25
1.4.1	Formas Especiais e Canônicas . . . . .	26
1.4.2	Lema de Heyman . . . . .	36
1.5	Resultados Genéricos . . . . .	39
1.6	Método Matricial . . . . .	41
1.7	Método dos Autovetores . . . . .	42
1.8	Efeito sobre os Zeros . . . . .	42
1.9	Injeção de Saída . . . . .	42
1.10	Estabilizabilidade e Detetabilidade . . . . .	42
1.11	Comentários, Conclusões e Referências . . . . .	42
1.12	Exercícios . . . . .	42
<b>2</b>	<b>Realimentação de Estados Prática</b>	<b>47</b>
2.1	Introdução . . . . .	47
2.2	Técnicas de Recuperação do Estado . . . . .	49
2.2.1	Derivando saídas e entradas . . . . .	49
2.2.2	Reconstruindo o modelo . . . . .	51
2.3	Técnicas de Substituição de Estado . . . . .	53
2.4	Resumo do Enredo e Perguntas . . . . .	54
2.5	Teoria dos Observadores . . . . .	55
2.6	Resumo do enredo . . . . .	60
2.7	Escolhendo a Rapidez . . . . .	64
2.8	Diminuindo a Ordem . . . . .	66

2.9	Separação de Estados . . . . .	69
2.10	Robustez, Monitores e Compensadores . . . . .	75
2.11	Comentários e Referências . . . . .	85
<b>3</b>	<b>Observadores, construção</b>	<b>87</b>
3.1	Introdução . . . . .	87
3.2	Método # 1 . . . . .	88
3.3	Um pouco de teoria . . . . .	92
3.4	Método # 2 . . . . .	93
3.5	Uso de Formas Canônicas . . . . .	95
3.5.1	Sistemas com uma única variável de saída . . . . .	95
3.5.2	Método #3 — Observador de ordem completa . . . . .	97
3.5.3	Método #4 — Observador mínimo para $r = 1$ . . . . .	101
3.6	Observador Mínimo para o Caso Geral $r > 1$ . . . . .	104
3.7	Exercícios . . . . .	106
<b>4</b>	<b>Compensadores</b>	<b>109</b>
4.1	Na frequência . . . . .	109
4.2	Compensadores . . . . .	109
4.3	Filtros . . . . .	109

# Capítulo 1

## Realimentação de Estados

### 1.1 Introdução

As mudanças de base por meio de transformações de equivalência afetam o formato exterior das equações dinâmicas de um dado sistema, mas estas mudanças são especiais, pois várias grandezas permanecem inalteradas na nova base, como por exemplo os autovalores, o polinômio característico, a função de transferência, a controlabilidade e a observabilidade, etc. Estas propriedades ou grandezas são chamadas de invariantes, por permanecerem as mesmas após a mudança.

Passamos agora a estudar um procedimento cujo resultado final é equivalente a alterar bem mais do que o formato exterior das equações dinâmicas, causando mudanças profundas na estrutura interna do sistema. Estas mudanças serão desejadas no estudo de síntese, onde o objetivo é exatamente esse: agir em um dado sistema até que ele passe a exibir um comportamento desejável. Uma das ferramentas possíveis para se atingir esta finalidade é a realimentação de estados. A ela:

### 1.2 Idéias Básicas

O sistema a se estudar, considerado linear e invariante no tempo, será representado por:

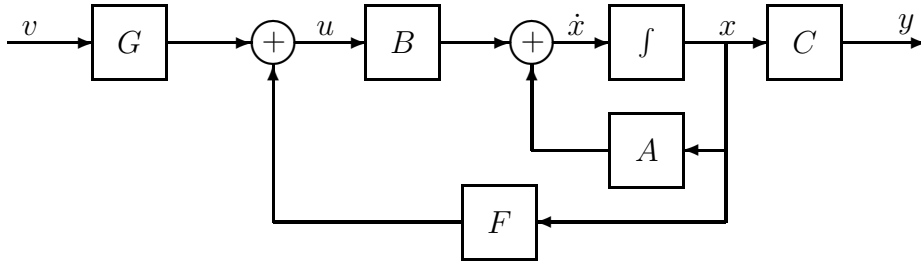
$$\mathcal{S}_a \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); & x(t_0) = x^0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

onde as matrizes  $A, B, C$  tem dimensões  $(n \times n)$ ,  $(n \times m)$  e  $(r \times n)$ , respectivamente, significando que temos  $m$  variáveis de entrada,  $r$  variáveis de

saída e o espaço de estados é  $n$ -dimensional. Muitas vezes, o sistema original sobre o qual se trabalhará é chamado de *Planta*, ou então de *Sistema de Malha Aberta*. Esta última denominação é explicitada pelo símbolo  $\mathcal{S}_a$  acima. Veremos agora os efeitos de substituir a entrada  $u(\cdot)$  por uma combinação linear das variáveis de estado somada a uma nova entrada  $v(\cdot)$ , com  $m'$  componentes. A expressão matemática para isto é

$$u(\cdot) = Fx(\cdot) + Gv(\cdot)$$

onde as matrizes  $F$  e  $G$  tem dimensões  $(m \times n)$  e  $(m \times m')$ . Um diagrama de blocos ilustra bem esta situação, como sempre o fazem, aliás:



O sistema com entrada  $v(\cdot)$ , saída  $y(\cdot)$ , e estado  $x(\cdot)$  será chamado de sistema de malha fechada; sua equação dinâmica pode ser obtida facilmente:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + BFx(t) + BGv(t); & x(t_0) = x^0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + BGv(t); & x(t_0) = x^0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Vemos que o sistema de malha fechada apresenta o mesmo espaço de estados, o mesmo espaço de saídas e uma nova entrada  $v(\cdot)$ , sendo descrito por

$$\mathcal{S}_f \begin{cases} \dot{x}(t) = A_f x(t) + B_f v(t); & x(t_0) = x^0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

onde a matriz  $A_f$  é definida por  $A_f = A + BF$  e  $B_f = BG$ . Nas aplicações que nos interessam no momento,  $G$  pode ser considerada a identidade:  $G = I_m$ . Com isto temos  $B_f = B$  e a expressão básica para a realimentação de estados passa a ser

$$u(\cdot) = Fx(\cdot) + v(\cdot)$$

Qual o efeito das realimentações de estado nas propriedades importantes de um sistema? O resultado abaixo responde isso para a controlabilidade, garantindo que essa característica, ou a sua ausência, permanecem inalteradas após a realimentação.

**Teorema 1.2.1** *O sistema de malha fechada  $\mathcal{S}_f$  é controlável para todo  $F$  se e somente se o sistema de malha aberta  $\mathcal{S}_a$  também o for.*

**Demonstração:**

Sejam as matrizes de controlabilidade para os sistemas de malha aberta e fechada dadas, respectivamente, por

$$U_a = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U_f = \begin{bmatrix} B & A_f B & \dots & A_f^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Se  $U_f$  tem posto completo para qualquer valor de  $F$ , seu posto será completo para  $F = 0$ . Isto significa que controlabilidade da malha fechada implica em controlabilidade da malha aberta. Ao invés de empregar um argumento matricial semelhante para demonstrar a recíproca, usaremos a definição de controlabilidade. Se em  $\mathcal{S}_a$  temos uma entrada  $u^*(\cdot)$  que transfere o estado de sua posição inicial  $x(0)$  em  $t = 0$  para a posição final  $x(t_f)$  em  $t = t_f$ , em  $\mathcal{S}_f$  teremos  $v^*(\cdot) = u^*(\cdot) - Fx(\cdot)$  acarretando a mesma mudança. ■

O enunciado do teorema acima garante apenas que a controlabilidade é mantida por realimentações de estado, mas é simples demonstrar, por manipulações matriciais, que o posto de  $U_a$ , qualquer que seja ele, é idêntico ao de  $U_f$  independentemente da  $F$  considerada. Os leitores são convidados a trabalhar nos detalhes algébricos. O fato importante a ser inferido é que a controlabilidade não pode ser destruída ou criada por meio desta ferramenta: suas características são perfeitamente preservadas pela realimentação de estados.

Embora a controlabilidade permaneça intacta, o mesmo não se pode dizer da observabilidade: esta propriedade pode ser alterada por meio de realimentação de estados. Alguns esquemas de síntese fazem uso deste fato: se queremos corrigir determinadas características indesejáveis de uma planta, basta destruir a observabilidade delas. Essas características continuam a existir e continuam a ser indesejáveis, elas apenas deixam de contaminar a saída do sistema. É como varrer o lixo para baixo do tapete, esconde a sujeira mas não se pode dizer que o problema tenha sido resolvido. Há filosofias de síntese bem mais eficientes, e honestas, do que esta.

A realimentação de estados também se mostra capaz de escolher com certa liberdade os autovalores do sistema de malha fechada, como se poderia verificar facilmente por meio de exemplos. Isto suscita algumas questões, de grande aplicabilidade no campo da síntese: até que ponto é possível usar uma realimentação do tipo  $u = Fx + v$  para modificar o efeito de autovalores indesejáveis de uma dada planta? onde é possível colocar os autovalores da malha fechada? sob que condições? O principal resultado desta seção — e um dos mais importantes de toda a teoria de sistemas lineares! — apresenta os efeitos de uma realimentação de estados, mostrando toda a riqueza e poder dessa técnica.

### **Teorema 1.2.2 Teorema da Alocação dos Autovalores**

*Os autovalores da malha fechada podem ser arbitrariamente designados por uma realimentação de estados  $u(\cdot) = Fx(\cdot) + v(\cdot)$  se e somente se a malha aberta é controlável.*

Este teorema da localização, ou alocação, ou designação dos autovalores diz que o comportamento dinâmico da malha fechada pode ser arbitrariamente escolhido se e somente se a malha aberta for controlável. Sua importância é profunda tanto em aplicações práticas como em investigações teóricas, pois a total liberdade na escolha do espectro da malha fechada é uma propriedade muito poderosa e altamente desejável. Algumas pessoas usam a terminologia Alocação de Pólos, baseados nas relações conhecidas entre os autovalores de  $A$  e os pólos da matriz de transferência.

Antes de prosseguir, um aviso sobre o termo “arbitrário” empregado nas últimas linhas. Se um dos autovalores de uma matriz real for complexo, o complexo conjugado também será autovalor; deste modo, escolher arbitrariamente os autovalores da malha fechada significa escolher um conjunto arbitrário de valores onde os complexos aparecem sempre em pares conjugados. Para formalizar estas idéias podemos definir **Conjunto Simétrico** como um conjunto de números complexos simétricos com relação ao eixo real, ou seja, quando um dado complexo  $z$  pertence a um conjunto simétrico, seu conjugado  $\bar{z}$  também pertence. Sendo o sistema de malha aberta  $\mathcal{S}_a$  representado pela tripla de matrizes  $\langle A, B, C \rangle$  com o espectro de  $A$  dado por  $\lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , e sendo  $\lambda^*$  um conjunto simétrico de  $n$  números complexos totalmente arbitrários o teorema diz que:

$$\exists F \text{ tal que } \lambda(A + BF) = \lambda^* \iff \langle A, B \rangle \text{ é controlável}$$

A demonstração da validade desse teorema será dividida em partes. Começaremos pela mais rápida:

**Demonstração. A condição é necessária:**

Devemos mostrar que se os autovalores da malha fechada podem ser livremente escolhidos por  $F$  então a malha aberta é controlável. Para isto, supomos inicialmente a incontrolabilidade de  $\langle A, B \rangle$ . Sabemos pelo teorema da decomposição canônica que existe uma base do espaço de estados que explicita as partes controlável e incontrolável do sistema, ou seja, existe uma matriz inversível  $Q$  tal que a transformação de equivalência  $x = Q\hat{x}$  faz com que  $\mathcal{S}_a$  seja representado na nova base pela tripla  $\langle \hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \rangle$ , onde

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uma realimentação de estados  $u = Fx + v$  na base original é equivalente à realimentação  $u = \hat{F}\hat{x} + v$  na nova base, onde  $\hat{F} = FQ$ . Para implementar esta última lei é preciso particionar  $\hat{F}$  de acordo com o tamanho dos blocos  $\hat{A}_{ij}$ :

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} \hat{F}_1 & \hat{F}_2 \end{bmatrix}$$

As matrizes que descrevem o sistema de malha fechada na nova base são:

$$\hat{A} + \hat{B}\hat{F} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} + \hat{B}_1\hat{F}_1 & \hat{A}_{12} + \hat{B}_1\hat{F}_2 \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Alguns dos autovalores da malha aberta, aqueles contidos em  $\lambda(\hat{A}_{22})$ , fazem parte do espectro da malha fechada, forçosamente. Isto significa que não haverá liberdade total na escolha de  $\lambda(A + BF)$ . ■

Os argumentos acima mostram que modos incontroláveis de um sistema são insensíveis aos efeitos de realimentações de estado: os autovalores não podem ser “movidos” e permanecem fincados no mesmo lugar. Alguns autores descrevem esta situação usando o termo, bem apropriado, **Modos Fixos**. Os modos fixos de um sistema seriam aqueles incontroláveis, incapazes de serem deslocados por realimentações de estado.

Uma parte do teorema 1.2.2 já foi estabelecida, falta demonstrar que se um modo é controlável temos liberdade total para “movê-lo” ou, de uma maneira mais geral, se o sistema de malha aberta é controlável temos liberdade total na escolha dos autovalores da malha fechada. Trataremos deste problema nas próximas seções: sendo conhecidas a planta e as localizações para onde se deseja mover os autovalores, deveremos encontrar uma realimentação de estados que faça o serviço, ou então concluir que ela não existe. Alguns

dos métodos apresentados servirão para demonstrar, de maneira construtiva, a suficiência da condição acima. Para tornar mais claros os desenvolvimentos, consideraremos separadamente sistemas com apenas uma ou com várias entradas.

## 1.3 Sistemas Com Apenas Uma Entrada

Como as relações de saída não nos interessam no momento, podemos considerar a planta dada por

$$\mathcal{S}_a \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t); \\ x(t_0) = x^0 \end{array} \right.$$

onde representamos a matriz  $B$  pelo vetor  $b$  para enfatizar que se trata de um sistema monoentrada. Seja

$$\Delta_a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

o polinômio característico de  $A$ . Supondo que os autovalores desejados para a malha fechada são  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*$ , a matriz  $F$ , que denotaremos por  $f$  por conter apenas uma linha, deve ser escolhida de tal maneira que o polinômio característico de  $A + bf$  seja dado por

$$\Delta_f(s) = (s - \lambda_1^*)(s - \lambda_2^*) \cdots (s - \lambda_n^*) = s^n + a_{n-1}^*s^{n-1} + \cdots + a_1^*s + a_0^*$$

Analisaremos três métodos distintos para o problema em pauta. O primeiro deles esmiuça detalhadamente a estrutura do problema, evidenciando de maneira clara as dificuldades envolvidas. As soluções propostas pelos dois métodos restantes são bem mais interessantes do ponto de vista prático, e permitirão demonstrar, de forma elegante e construtiva, a suficiência do Teorema da Alocação dos Pólos para sistemas com uma única entrada.

### 1.3.1 Método da Força Bruta

O problema de escolher os autovalores da malha fechada através de realimentação de estados será discutido com o auxílio de exemplos. Os resultados permitirão entender os mecanismos internos postos em jogo, motivando assim a apresentação de métodos mais gerais, capazes de providenciar provas elegantes para a suficiência do teorema 1.2.2. O método é simples: supomos uma matriz de realimentação geral e impomos, “na marra”, as condições desejadas para a malha fechada.



**Exemplo 1.3.1** *Seja o sistema dado por*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

*Como ele se encontra na Forma de Jordan, os autovalores podem ser obtidos por inspeção:  $\lambda(A) = \{1, 1, 1\}$  e  $\Delta_a(s) = s^3 - 3s^2 + 3s - 1$ . Deseja-se os autovalores em  $-1$ :  $\lambda_1^* = \lambda_2^* = \lambda_3^* = -1$ . Considerando uma realimentação de estados caracterizada por  $f = [f_1 \ f_2 \ f_3]$  a malha fechada seria descrita por*

$$A + bf = \begin{bmatrix} 1 + f_1 & 1 + f_2 & f_3 \\ f_1 & 1 + f_2 & 1 + f_3 \\ f_1 & f_2 & 1 + f_3 \end{bmatrix}$$

*Calculando o polinômio característico  $\Delta_f(s)$  para esta matriz:*

$$\Delta_f(s) = s^3 + (-3 - f_1 - f_2 - f_3)s^2 + (3 + f_1 + f_2 + 2f_3)s + (-1 - f_1 - f_3)$$

*Igualando os coeficientes deste polinômio aos coeficientes do polinômio desejado  $\Delta^*(s) = (s + 1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$ , obtém-se as equações:*

$$-3 - f_1 - f_2 - f_3 = 3 \quad (1.1)$$

$$3 + f_1 + f_2 + 2f_3 = 3 \quad (1.2)$$

$$-1 - f_1 - f_3 = 1 \quad (1.3)$$

*cuja resolução fornece  $f_1 = -8$ ,  $f_2 = -4$  e  $f_3 = 6$ , donde se monta a matriz de realimentação procurada.*

O procedimento empregado neste exemplo é um tanto quanto cego, pois todo o desenvolvimento é efetuado sem o conhecimento prévio da existência de soluções. Apenas na etapa final, na análise do sistema de equações, haverá uma resposta a este problema. Outro inconveniente desagradável reside no fato de as matrizes e polinômios envolvidos serem literais. Embora haja no mercado pacotes de computação simbólica capazes de resolver problemas como esses, o seu uso ainda não é tão disseminado quanto o dos pacotes numéricos.

Há um outro aspecto. Em várias situações de pesquisa e didáticas, é muito interessante resolver problemas como o acima na mão, pois com isso se ganha uma visão mais detalhada da estrutura interna. Para um exemplo

como este, de ordem 3, a trabalhadeira ainda é factível (bem ... mais ou menos ...), mas para ordens mais elevadas a complexidade das manipulações poderia rapidamente inviabilizar os desenvolvimentos.

O ponto decisivo do método acima é um sistema de  $n$  equações com  $n$  incógnitas. Sabemos que a discussão e a resolução de tais sistemas podem ser facilitadas quando eles estão na forma escalonada ou, melhor ainda, na forma diagonal; nessas situações os procedimentos se tornam triviais. Um problema interessante surge: é possível colocar o sistema de equações responsável pela alocação de autovalores em uma forma camarada? como deveriam ser as matrizes  $A$  e  $b$ ?

**Exemplo 1.3.2** *Seja o sistema dado por*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

*O polinômio característico pode ser obtido facilmente, por estar  $A$  na forma companheira:  $\Delta_a(s) = s^3 - 3s^2 + 3s - 1$ , resultando  $\lambda(A) = \{1, 1, 1\}$ . Como no caso anterior, deseja-se os autovalores:  $\lambda_1^* = \lambda_2^* = \lambda_3^* = -1$ . Considerando uma realimentação de estados caracterizada por  $f = [f_1 \ f_2 \ f_3]$  a malha fechada seria descrita por*

$$A + bf = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 + f_1 & -3 + f_2 & 3 + f_3 \end{bmatrix}$$

*Calculando o polinômio característico  $\Delta_f(s)$  para esta matriz:*

$$\Delta_f(s) = s^3 + (-3 - f_3)s^2 + (3 - f_2)s + (-1 - f_1)$$

*Igualando os coeficientes deste polinômio aos coeficientes do polinômio desejado  $\Delta^*(s) = (s + 1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$ , obtém-se o seguinte sistema:*

$$-3 - f_3 = 3 \quad (1.4)$$

$$3 - f_2 = 3 \quad (1.5)$$

$$-1 - f_1 = 1 \quad (1.6)$$

*cuja resolução é trivial, fornecendo  $f_1 = -2$ ,  $f_2 = 0$  e  $f_3 = -6$ , donde se monta a matriz de realimentação procurada.*

As especulações anteriores a este exemplo parecem ter sido respondidas por ele: o sistema de equações obtido é diagonal e permite solução direta. Qual o segredo da mágica? é sempre possível repeti-la? Estes detalhes serão elaborados, e respondidos, na próxima seção.

### 1.3.2 Forma Canônica Controlável

No último exemplo da seção anterior a malha aberta era caracterizada por uma matriz quadrada na forma companheira e por uma matriz coluna cujo único elemento não nulo ocupava a última linha. Para verificar se as facilidades encontradas nesse exemplo tem origem nessa particular estrutura, consideremos um sistema descrito por uma equação dinâmica nesse formato:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (1.7)$$

Devido à estrutura de  $A$ , seu polinômio característico é encontrado por inspeção dos elementos da última linha: basta inverter seus sinais e associá-los às potências de  $s$ . Obteríamos  $\Delta_a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$ . Uma realimentação de estados  $u(t) = f x(t) + v(t) = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n]x(t) + v(t)$  acarretaria uma malha fechada descrita por

$$\dot{x}(t) = (A + bf)x(t) + bv(t)$$

A forma de  $b$  garante linhas nulas em  $bf$ , com exceção da última, composta pelos elementos de  $f$ . Assim, a malha fechada passa a ser descrita por

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 1 \\ f_1 - a_0 & f_2 - a_1 & \dots & \dots & f_n - a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (1.8)$$

A matriz  $A + bf$  continua em forma companheira, por especial cortesia das estruturas de  $A$  e  $b$ , e isto permite a imediata obtenção de seu polinômio característico:

$$\Delta_f(s) = s^n + (a_{n-1} - f_n)s^{n-1} + \dots + (a_1 - f_2)s + (a_0 - f_1)$$

Cada coeficiente deste polinômio depende de um único elemento de  $f$ , logo a tarefa de escolher os autovalores da malha fechada recai na de solucionar um sistema de  $n$  equações,  $n$  incógnitas e diagonal. Deste modo, os fatos encontrados no exemplo (1.3.2) são apenas casos particulares de uma realidade mais geral: o problema de alocar os autovalores da malha fechada

é praticamente trivial quando a malha aberta exibe a estrutura mostrada nas equações dinâmicas 1.7. Mas esta é a estrutura vista na seção ?? para a Forma Canônica Controlável, FCC, a menos da equação para a saída.

E quando a malha aberta não apresenta essa cômoda estrutura? Poder-se-ia pensar em uma mudança de bases que a colocasse na FCC. A realimentação de estados seria feita nessa nova base, e teríamos assim resolvido o problema, com o ônus extra de uma mudança de bases inicial. Esta linha de ação é perfeitamente viável, como se vê no próximo resultado, que estabelece as condições para a existência de uma tal mudança de bases inicial.

**Lema 1.3.1** *Se um sistema monoentrada é controlável, existe uma base na qual as equações dinâmicas que o representam exibem a estrutura da Forma Canônica Controlável, mostrada em 1.7.*

Em outras palavras, sendo  $< A, b >$  controlável, é possível colocar suas equações dinâmicas em um formato que facilita sobremaneira a escolha do comportamento dinâmico da malha fechada. Seja então a transformação de equivalência  $x = Q\hat{x}$  que acarreta, na nova base,

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & & & \ddots & \\ \vdots & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (1.9)$$

Após representar o sistema de malha aberta em sua Forma Canônica Controlável podemos usar a realimentação de estados na nova base:

$$u(t) = \hat{f}\hat{x}(t) + v(t) = [\hat{f}_1 \ \hat{f}_2 \ \dots \ \hat{f}_n]\hat{x}(t) + v(t)$$

As equações dinâmicas da malha fechada, nesta nova base, são

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & & & \ddots & \\ \vdots & & & & 1 \\ \hat{f}_1 - a_0 & \hat{f}_2 - a_1 & \dots & \dots & \hat{f}_n - a_{n-1} \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t)$$

Sendo  $\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*\}$  os autovalores desejados para a malha fechada, construímos o polinômio

$$\begin{aligned} \Delta^*(s) &= (s - \lambda_1^*)(s - \lambda_2^*) \dots (s - \lambda_n^*) \\ &= s^n + a_{n-1}^* s^{n-1} \dots + a_1^* s + a_0^* \end{aligned}$$

Impor este polinômio como o polinômio característico da malha fechada é, nesta base, tarefa simples: basta igualar a última linha da matriz de dinâmica aos coeficientes acima, com sinais trocados. Resultaria

$$\hat{f}_1 = a_0 - a_0^*, \quad \hat{f}_2 = a_1 - a_1^*, \quad \dots \quad \hat{f}_n = a_{n-1} - a_{n-1}^*$$

Como

$$\hat{A} + \hat{b}\hat{f} = Q^{-1}AQ + Q^{-1}b\hat{f}$$

se tomarmos  $f = \hat{f}Q^{-1}$  podemos escrever

$$\hat{A} + \hat{b}\hat{f} = Q^{-1}AQ + Q^{-1}bfQ = Q^{-1}(A + bf)Q$$

donde se conclui que  $\lambda(A + bf)$  é composto pelos autovalores desejados, ou seja, a matriz  $f = \hat{f}Q^{-1}$  é capaz de escolher arbitrariamente os autovalores da malha fechada, impondo-lhe assim um comportamento dinâmico que pode ser escolhido livremente. Bem, tudo está funcionando de acordo com o figurino, falta apenas demonstrar a validade do lema, o que passa a ser feito agora.

**Demonstração do Lema 1.3.1:** Sendo a malha aberta controlável, a matriz de controlabilidade

$$U_a = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^{n-1}b]$$

tem posto completo. Supondo o polinômio característico de  $A$  dado por  $\Delta_a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$ , considere a matriz  $(n \times n)$

$$V_a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & \dots & & 0 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

É simples verificar que esta matriz possui posto completo. Seja agora

$$Q = U_a V_a \quad (1.11)$$

Como as colunas de  $Q$  são combinações lineares das colunas de  $U_a$ , seu posto é completo também. Usando-a para a mudança de bases  $x = Q\hat{x}$  obteríamos

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ \quad \text{e} \quad \hat{b} = Q^{-1}b$$

Passemos agora a mostrar que estas matrizes possuem as estruturas desejadas. Uma simples manipulação permite escrever

$$AQ = Q\hat{A} \quad (1.12)$$

$$b = Q\hat{b} \quad (1.13)$$

Usando os símbolos  $q^i$  e  $\hat{a}^i$  para denotar as  $i$ -ésimas colunas de  $Q$  e  $\hat{A}$ , respectivamente, podemos escrever

$$Q = [q^1 \ q^2 \ \dots \ q^n] \quad \text{e} \quad \hat{A} = [\hat{a}^1 \ \hat{a}^2 \ \dots \ \hat{a}^n]$$

A equação (1.13) diz que  $b$  é uma combinação linear das colunas de  $Q$ , e que os coeficientes desta combinação linear, montados em um vetor, fornecem  $\hat{b}$ . Quem são exatamente as colunas de  $Q$ ? Efetuando o produto  $U_a V_a$  obteríamos

$$q^1 = A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \dots + a_2Ab + a_1b \quad (1.14)$$

$$q^2 = A^{n-2}b + a_{n-1}A^{n-3}b + \dots + a_2b \quad (1.15)$$

$$\vdots \quad (1.16)$$

$$q^{n-1} = Ab + a_{n-1}b \quad (1.17)$$

$$q^n = b \quad (1.18)$$

Como estes vetores são linearmente independentes, a única combinação linear deles capaz de gerar  $b$  é

$$b = 0 \times q^1 + 0 \times q^2 + \dots + 1 \times q^n$$

Isto significa que  $\hat{b}$  é dado por

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

A equação (1.12) diz que o produto de  $A$  pela  $i$ -ésima coluna de  $Q$  deve ser igual ao produto de  $Q$  pela  $i$ -ésima coluna de  $\hat{A}$ . Em símbolos:  $Aq^i = Q\hat{a}^i$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ . Aplicando esta expressão para  $i = n$ , e lembrando que  $q^n = b$ , temos  $Ab = Q\hat{a}^n$ , ou seja, para obter  $\hat{a}^n$ , a última coluna de  $\hat{A}$ , devemos encontrar a combinação linear das colunas de  $Q$  capaz de gerar  $Ab$ . Analisando as equações para as colunas de  $Q$ , dadas anteriormente, verificamos que  $Ab = q^{n-1} - a_{n-1}b = q^{n-1} - a_{n-1}q^n$ . Mas isto quer dizer que

$$\hat{a}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Um raciocínio análogo nos leva a  $Aq^{n-1} = Q\hat{a}^{n-1}$ . Mas  $Aq^{n-1} = A(Ab + a_{n-1}b) = A^2b + a_{n-1}Ab = q^{n-2} - a_{n-2}b = q^{n-2} - a_{n-2}q^n$ , donde se conclui que

$$\hat{a}^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ -a_{n-2} \end{bmatrix}$$

A repetição destes argumentos para as outras colunas segue sem problemas. Para a primeira coluna teríamos  $Aq^1 = Q\hat{a}^1$ . Mas

$$\begin{aligned} Aq^1 &= A(A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \cdots a_1b) \\ &= A^n b + a_{n-1}A^{n-1}b + \cdots a_1Ab \\ &= (A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots a_1A)b \end{aligned}$$

Esta última linha, usando o teorema de Cayley-Hamilton, pode ser simplificada:  $Aq^1 = -a_0b$ . Mas isto implica em

$$\hat{a}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a_0 \end{bmatrix}$$

o que mostra que as matrizes  $\hat{A}$  e  $\hat{b}$  apresentam a estrutura prometida e, portanto, termina a demonstração. ■

A demonstração deste lema, como os leitores certamente já perceberam, nada mais é do que uma demonstração da suficiência de Teorema da Alocação de Pólos, para o caso de sistemas com apenas uma entrada. Parte da dívida já está saldada. Os desenvolvimentos acima podem ser sintetizados no

### Algoritmo 1.3.1 — Alocação de Pólos via FCC

*Este algoritmo permite a escolha dos autovalores da malha fechada para sistemas com apenas uma variável de entrada e controláveis. As matrizes da malha aberta  $A$  e  $b$  são os dados iniciais, bem como os autovalores  $\lambda_i^*$ , desejados para a malha fechada.*

**Passo 1:** Calcular a matriz  $U_a$ , o polinômio característico  $\Delta_a(s)$  da malha aberta e os reais  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , seus coeficientes.

**Passo 2:** Construir a matriz  $V_a$  de acordo com a equação (1.10).

**Passo 3:** Obter  $Q$ , efetuando  $Q = U_a V_a$ .

**Passo 4:** Calcular  $\Delta^*(s) = (s - \lambda_1^*)(s - \lambda_2^*) \cdots (s - \lambda_n^*)$  e obter os seus coeficientes reais  $a_i^*$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ .

**Passo 5:** Montar  $\hat{f} = [a_0 - a_0^* \quad a_1 - a_1^* \quad \dots \quad a_{n-1} - a_{n-1}^*]$

**Passo 6:** A matriz  $f = \hat{f}Q^{-1}$  é a realimentação procurada.

Muitas vezes este algoritmo é apresentado de forma ligeiramente diferente. Para entendê-la, recordemos as expressões que definem as colunas de  $Q$ :

$$\begin{aligned} q^1 &= A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \cdots a_2Ab + a_1b \\ q^2 &= A^{n-2}b + a_{n-1}A^{n-3}b + \cdots a_2b \\ &\vdots \\ q^{n-1} &= Ab + a_{n-1}b \\ q^n &= b \end{aligned}$$

Colocando  $A$  em evidência, e usando a segunda equação, a primeira equação acima pode ser escrita como

$$q^1 = A(A^{n-2}b + a_{n-1}A^{n-3}b + \cdots a_2b) + a_1b \quad (1.19)$$

$$= Aq^2 + a_1q^n \quad (1.20)$$

Raciocínios idênticos levariam a

$$\begin{aligned} q^2 &= Aq^3 + a_2q^n \\ &\vdots \\ q^{n-1} &= Aq^n + a_{n-1}q^n \\ q^n &= b \end{aligned}$$



Pronto, as colunas da matriz  $Q$  podem ser obtidas por meio de uma fórmula recorrente:

$$q^i = Aq^{i+1} + a_i q^n; \quad i = 1, 2 \dots n-1 \quad (1.21)$$

$$q^n = b \quad (1.22)$$

O algoritmo pode ser reescrito

### Algoritmo 1.3.2 — Alocação de Pólos via FCC

*Este algoritmo permite a escolha dos autovalores da malha fechada para sistemas com apenas uma variável de entrada e controláveis. As matrizes da malha aberta  $A$  e  $b$  são os dados iniciais, bem como os autovalores  $\lambda_i^*$ , desejados para a malha fechada.*

**Passo 1:** Calcular a matriz  $U_a$ , o polinômio característico  $\Delta_a(s)$  da malha aberta e os reais  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , seus coeficientes.

**Passo 2:** Obter  $Q$ , a partir de suas colunas:

$$\begin{aligned} q^n &= b \\ q^{n-1} &= Aq^n + a_{n-1}q^n \\ &\vdots \\ q^2 &= Aq^3 + a_2q^n \\ q^1 &= Aq^2 + a_1q^n \end{aligned}$$

**Passo 3:** Calcular  $\Delta^*(s) = (s - \lambda_1^*)(s - \lambda_2^*) \dots (s - \lambda_n^*)$  e obter os reais  $a_i^*$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , seus coeficientes.

**Passo 4:** Montar  $\hat{f} = [a_0 - a_0^* \quad a_1 - a_1^* \quad \dots \quad a_{n-1} - a_{n-1}^*]$

**Passo 5:** A matriz  $f = \hat{f}Q^{-1}$  é a realimentação procurada.

É bem hora de retomar o exemplo (1.3.1) e atacá-lo com as novas ferramentas desenvolvidas:

**Exemplo 1.3.3** Desejamos alocar os autovalores da planta abaixo em  $-1$ :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

*O polinômio característico de  $A$  pode ser encontrado facilmente:*

$$\Delta_a(s) = (s - 1)^3 = s^3 - 3s^2 + 3s - 1$$

*donde  $a_0 = -1$ ,  $a_1 = 3$  e  $a_2 = -3$ . As fórmulas de recorrência fornecem*

$$q^3 = b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad q^2 = Aq^3 + a_2q^3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad q^1 = Aq^2 + a_1q^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*donde obtemos  $Q$  e sua inversa:*

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

*O polinômio característico desejado para a malha fechada é:*

$$\Delta^*(s) = (s + 1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

*donde  $a_0^* = 1$ ,  $a_1^* = 3$  e  $a_2^* = 3$ . O próximo passo é*

$$\hat{f} = [a_0 - a_0^* \quad a_1 - a_1^* \quad a_2 - a_2^*] = [-2 \quad 0 \quad -6]$$

*Finalmente,*

$$f = \hat{f}Q^{-1} = [-8 \quad -4 \quad 6]$$

*Para verificação das contas:*

$$A + bf = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -4 & 6 \\ -8 & -4 & 6 \\ -8 & -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -3 & 6 \\ -8 & -3 & 7 \\ -8 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

*Os leitores ansiosos para se certificarem da validade do método podem — e devem! — terminar o exemplo. Os outros leitores também. Apenas por curiosidade, se efetuássemos a mudança de bases  $x = Q\hat{x}$  obteríamos as matrizes  $\hat{A} = Q^{-1}AQ$  e  $\hat{b} = Q^{-1}b$  exatamente como no exemplo (1.3.2). Mais uma vez os leitores são convidados ao trabalho: façam as contas e tirem suas conclusões.*

Vimos nesta seção que, sendo  $\langle A, b \rangle$  controlável, será possível colocar as equações dinâmicas da malha aberta na Forma Canônica Controlável, e

isto facilitará bastante o problema de se escolher o comportamento dinâmico da malha fechada. A FCC se caracteriza por uma matriz quadrada na forma companheira e por uma matriz coluna cujo único elemento não nulo é o último. Uma análise do diagrama de blocos apresentado na seção ?? permite confirmar a afinidade especial existente entre a Forma Canônica Controlável e a realimentação de estados. Com efeito, já no capítulo anterior comentávamos que o diagrama da FCC é composto por um banco de integradores em série de cujo miolo “tudo sai”. O miolo do diagrama é composto pelas variáveis de estado, e elas são levadas para o “fim” do diagrama, multiplicadas pelos coeficientes do numerador de  $g(s)$  e para o “começo” dele, multiplicadas pelos coeficientes do denominador, mas isto é exatamente a idéia de realimentação de estados, daí a afinidade.

Vimos também nesta seção como demonstrar a suficiência do Teorema da Alocação de Pólos para sistemas controláveis com uma única entrada. Para estes sistemas o espaço de estados pode ser decomposto em um único subespaço cíclico, do que decorre a simplicidade da livre designação dos autovalores através de realimentação de estados.

### 1.3.3 Duas Fórmulas Úteis

Desenvolveremos nesta seção dois resultados gerais relacionando os parâmetros dados da malha aberta, os parâmetros desejados para a malha fechada, e a realimentação de estados capaz de fazer o serviço: as fórmulas de Bass-Gura e a de Ackerman. Antes, porém, apresentaremos duas conhecidas propriedades. A primeira delas é uma identidade matricial e, como tantas outras, virá sem demonstração; os leitores são convidados a tentar uma. Deve-se notar que esta identidade vale para matrizes  $M$  e  $N$  reais, polinomiais ou racionais.

**Propriedade 1.3.1** *Sejam  $M$  e  $N$  duas matrizes tais que os produtos  $MN$  e  $NM$  existem, então  $\det(I + MN) = \det(I + NM)$ .*

A segunda propriedade, além de suas várias possíveis aplicações analíticas, fornece um método muito cômodo para o cálculo da inversa  $(sI - A)^{-1}$  e também do polinômio característico  $\Delta_a(s)$ . Sua utilidade será comprovada em breve. O símbolo  $\text{tr}(M)$ , usado abaixo, denota o *traço* da matriz  $M$ , ou seja, a soma dos elementos de sua diagonal principal.

### Propriedade 1.3.2 Algoritmo de Leverrier

*Sejam  $A$  uma matriz real  $(n \times n)$  podemos escrever*

$$(sI - A)^{-1} = \frac{R(s)}{\Delta_a(s)}$$

onde  $\Delta_a(s)$  é o polinômio característico de  $A$  e  $R(s)$  é uma matriz polinomial  $(n \times n)$  dados, respectivamente, por:

$$\Delta_a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots a_1s + a_0 \quad (1.23)$$

$$R(s) = R_{n-1}s^{n-1} + R_{n-2}s^{n-2} + \cdots R_1s + R_0 \quad (1.24)$$

Os coeficientes  $a_i$  e  $R_i$  são obtidos através das equações:

$$\begin{aligned} R_{n-1} &= I \quad ; \quad a_{n-1} = -\text{tr}(AR_{n-1}) \\ R_{n-2} &= AR_{n-1} + a_{n-1}I \quad ; \quad a_{n-2} = -\frac{1}{2}\text{tr}(AR_{n-2}) \\ R_{n-3} &= AR_{n-2} + a_{n-2}I \quad ; \quad a_{n-3} = -\frac{1}{3}\text{tr}(AR_{n-3}) \\ &\vdots \\ R_0 &= AR_1 + a_1I \quad ; \quad a_0 = -\frac{1}{n}\text{tr}(AR_0) \\ R_{-1} &= AR_0 + a_0I = \Delta_a(A) = 0 \end{aligned}$$

Mais uma vez um resultado sem demonstração; e mais uma vez a sugestão de que os leitores se encarreguem dos detalhes. Tentem, leitores; é simples e gratificante. Este resultado é algumas vezes chamado também de **Algoritmo de Leverrier-Souriau-Faddeev**. Os  $R_i$  podem ser apresentados em forma expandida, como seria imediato verificar a partir das expressões acima:

$$\begin{aligned} R_{n-1} &= I \\ R_{n-2} &= A + a_{n-1}I \\ R_{n-3} &= A^2 + a_{n-1}A + a_{n-2}I \\ &\vdots \\ R_0 &= A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots a_1A \\ R_{-1} &= A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots a_1A + a_0 = 0 \end{aligned}$$

O coeficiente  $R_{-1}$  não aparece na expansão de  $R(s)$ , ele deve ser nulo, e serve apenas para se verificar a exatidão dos cálculos.

**Exemplo 1.3.4** *Seja a matriz*

$$\begin{bmatrix} -7 & -3 & 6 \\ -8 & -3 & 7 \\ -8 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

*Seguindo os passos do algoritmo temos:*

$$R_2 = I$$

$$a_2 = -\text{tr}(AR_2) = 3$$

$$R_1 = AR_2 + a_2I = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ -8 & 0 & 7 \\ -8 & -4 & 10 \end{bmatrix} \quad a_1 = -\frac{1}{2}\text{tr}(AR_1) = 3$$

$$R_0 = AR_1 + a_1I = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 8 & -4 & -3 \end{bmatrix} \quad a_0 = -\frac{1}{3}\text{tr}(AR_0) = 1$$

O polinômio característico obtido é:  $s^3 + 3s^2 + 3s + 1$ . A matriz polinomial  $R(s)$  e a inversa  $(sI - A)^{-1}$  seriam encontradas facilmente.

Voltando ao problema em pauta, seja a planta

$$\mathcal{S}_a \left\{ \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t); \quad x(t_0) = x^0 \right.$$

cuja dinâmica é caracterizada pelo polinômio

$$\Delta_a(s) = \det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

A realimentação de estados  $u(t) = f x(t) + v(t)$  acarreta um sistema de malha fechada dado por

$$\mathcal{S}_f \left\{ \dot{x}(t) = (A + bf)x(t) + bv(t); \quad x(t_0) = x^0 \right.$$

com dinâmica dada pelo polinômio característico

$$\begin{aligned} \Delta_f(s) &= \det[sI - A - bf] \\ &= \det \left\{ (sI - A) \left[ I - (sI - A)^{-1}bf \right] \right\} \\ &= \det(sI - A) \det \left[ I - (sI - A)^{-1}bf \right] \\ &= \det(sI - A) \det \left[ I - f(sI - A)^{-1}b \right] \end{aligned}$$

Na última passagem foi usada a propriedade 1.3.1, vista acima. Como a grandeza  $f(sI - A)^{-1}b$  é escalar podemos simplificar a última expressão:

$$\Delta_f(s) = \det(sI - A) \left[ 1 - f(sI - A)^{-1}b \right]$$

A diferença entre os polinômios característicos pode ser obtida:

$$\Delta_a(s) - \Delta_f(s) = \Delta_a(s)f(sI - A)^{-1}b \quad (1.25)$$

Agora entra em cena Leverrier:

$$\begin{aligned}\Delta_a(s) - \Delta_f(s) &= f\Delta_a(s)(sI - A)^{-1}b \\ &= fR(s)b \\ &= fR_{n-1}bs^{n-1} + fR_{n-2}bs^{n-2} + \dots + fR_0b\end{aligned}$$

Lembrando o formato da matriz de controlabilidade da malha aberta

$$U_a = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^{n-1}b]$$

e a definição dos coeficientes matriciais  $R_i$  vista no Algoritmo de Leverrier, podemos exprimir os vetores  $R_i b$  como:

$$\begin{aligned}R_{n-1}b &= b = U_a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ R_{n-2}b &= Ab + a_{n-1}b = U_a \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ R_0b &= A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \dots + a_1b = U_a \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Voltando à definição de  $V_a$ , na equação (1.10), percebemos que

$$\begin{aligned}R_{n-1}b &= U_a V_a e_n \\ R_{n-2}b &= U_a V_a e_{n-1} \\ &\vdots \\ R_0b &= U_a V_a e_1\end{aligned}$$

onde o vetor  $e_i$  denota a  $i$ -ésima coluna da matriz identidade  $I_n$ . Retomando o fio da meada, a expressão para a diferença dos polinômios característicos fica:

$$\Delta_a(s) - \Delta_f(s) = fR_{n-1}bs^{n-1} + fR_{n-2}bs^{n-2} + \dots + fR_0b$$

$$\begin{aligned}
&= f[R_0b \quad \cdots \quad R_{n-2}b \quad R_{n-1}b] \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix} \\
&= f[U_aV_ae_1 \quad \cdots \quad U_aV_ae_{n-1} \quad U_aV_ae_n] \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix} \\
&= fU_aV_a \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Sendo  $s^n + a_{n-1}^*s^{n-1} + \cdots + a_1^*s + a_0^*$  o polinômio que se deseja impor à malha fechada, temos

$$\begin{aligned}
\Delta_a(s) - \Delta_f(s) &= (a_{n-1} - a_{n-1}^*)s^{n-1} + \cdots + (a_1 - a_1^*)s + (a_0 - a_0^*) \\
&= (\delta - \delta^*) \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

onde os vetores  $\delta$  e  $\delta^*$  são definidos a partir dos coeficientes  $a_i$  e  $a_i^*$ :

$$\delta = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_{n-1}] \quad \text{e} \quad \delta^* = [a_0^* \quad a_1^* \quad \cdots \quad a_{n-1}^*]$$

Deste ponto é fácil concluir que

$$\delta - \delta^* = fU_aV_a \tag{1.26}$$

Esta expressão, bastante geral para sistemas com apenas uma entrada, é conhecida como **Fórmula de Bass-Gura**. Ela permite, havendo controlabilidade, calcular a realimentação necessária para alocar os autovalores da malha fechada em posições arbitrárias. É trivial verificar isto: como  $V_a$  é sempre inversível, por definição, sendo  $U_a$  também inversível teremos

$$f = (\delta - \delta^*)(U_aV_a)^{-1}$$

Estes fatos podem ser sumarizados no

### Algoritmo 1.3.3 — Alocação de Pólos via Bass-Gura

*Este algoritmo permite a escolha dos autovalores da malha fechada para sistemas com apenas uma variável de entrada e controláveis. As matrizes da malha aberta  $A$  e  $b$  são os dados iniciais, bem como os autovalores  $\lambda_i^*$ , desejados para a malha fechada.*

**Passo 1:** Calcular a matriz  $U_a$ , o polinômio característico  $\Delta_a(s)$  da malha aberta e os reais  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , seus coeficientes.

**Passo 2:** Construir a matriz  $V_a$  de acordo com a equação (1.10).

**Passo 3:** Calcular  $\Delta^*(s) = (s - \lambda_1^*)(s - \lambda_2^*) \cdots (s - \lambda_n^*)$  e obter os reais  $a_i^*$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , seus coeficientes.

**Passo 4:** Montar o vetor  $\delta - \delta^* = [a_0 - a_0^* \quad a_1 - a_1^* \cdots a_{n-1} - a_{n-1}^*]$ .

**Passo 5:** A matriz  $f = (\delta - \delta^*)(U_a V_a)^{-1}$  é a realimentação procurada.

O leitor atento terá percebido que, embora não haja qualquer menção explícita a respeito de mudança de bases, o método esquematizado acima é idêntico aos algoritmos de alocação de autovalores vistos na seção anterior. Com efeito, lembrando que a matriz que coloca uma dada planta na sua Forma Canônica Controlável pode ser obtida por  $Q = U_a V_a$ , vemos que (1.26) proporciona apenas uma demonstração alternativa para os algoritmos via FCC.

Analisando estes procedimentos percebemos que, para se alocar autovalores, deve-se conhecer o polinômio característico a ser imposto à malha fechada, através da matriz  $\delta^*$ , e vários elementos da malha aberta: as matrizes  $U_a$  e  $V_a$  e os coeficientes  $\delta$ . Quando o polinômio característico  $\Delta_a(s)$  é conhecido, a obtenção de  $V_a$  e  $\delta$  é direta. Mas nem sempre isto acontece; às vezes a malha aberta é dada apenas pelas matrizes  $A$  e  $b$  e será necessário calcular  $\Delta_a(s)$  antes de usar as fórmulas. O próximo resultado elimina estas necessidades; para estabelecê-lo partiremos da fórmula de Bass-Gura e procuraremos exprimir os coeficientes indesejados  $a_i$  em função de outros parâmetros. Como  $U_a V_a = Q$ , a matriz que coloca a malha aberta na FCC (1.7), a expressão básica fica

$$\begin{aligned} f &= [(a_0 - a_0^*) \quad (a_1 - a_1^*) \quad \cdots \quad (a_{n-1} - a_{n-1}^*)] Q^{-1} \\ &= \left\{ (a_0 - a_0^*) [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-1}^*) [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \right\} Q^{-1} \end{aligned}$$

A matriz  $A_c = Q^{-1} A Q$  apresenta-se na forma companheira, e sua estrutura particular conduz às equações abaixo. A verificação da validade delas é



deixada a cargo dos leitores diligentes (como sempre ...).

$$\begin{aligned}
e_1^T &= [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]I \\
e_2^T &= [0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0] = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]A_c \\
e_3^T &= [0 \ 0 \ 1 \ \cdots \ 0] = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]A_c^2 \\
&\vdots \\
e_n^T &= [0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 1] = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]A_c^{n-1}
\end{aligned}$$

onde o símbolo  $e_i^T$  denota a  $i$ -ésima linha da matriz identidade de ordem  $n$ . Usando estas últimas expressões na fórmula imediatamente anterior temos

$$\begin{aligned}
f &= e_1^T \left\{ (a_0 - a_0^*) + (a_1 - a_1^*)A_c + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-1}^*)A_c^{n-1} \right\} Q^{-1} \\
&= e_1^T Q^{-1} \left\{ (a_0 - a_0^*) + (a_1 - a_1^*)A + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-1}^*)A^{n-1} \right\}
\end{aligned}$$

Nesta passagem usamos a identidade  $A_c^i Q^{-1} = Q^{-1} A^i$ , decorrente da definição de  $A_c$ . Mas  $Q = U_a V_a$ , donde

$$\begin{aligned}
f &= e_1^T V_a^{-1} U_a^{-1} \left\{ a_0 + a_1 A + \cdots + a_{n-1} A^{n-1} - [a_0^* + \cdots + a_{n-1}^* A^{n-1}] \right\} \\
&= e_1^T V_a^{-1} U_a^{-1} \left\{ \Delta(A) - A^{n-1} - [\Delta^*(A) - A^{n-1}] \right\}
\end{aligned}$$

Consultando (1.10), a definição de  $V_a$ , e calculando a sua inversa perceberíamos que ela também é uma matriz triangular, com o mesmo formato. Lembrando ainda que, pelo teorema de Cayley-Hamilton,  $\Delta(A) = 0$  podemos concluir que

$$\begin{aligned}
f &= e_n^T U_a^{-1} \{-\Delta^*(A)\} \\
&= -e_n^T U_a^{-1} \Delta^*(A) = -[0 \ \cdots \ 0 \ 1] U_a^{-1} \Delta^*(A)
\end{aligned}$$

Esta é a Fórmula de Ackerman para a alocação de autovalores. Conforme o prometido ela fornece uma realimentação de estados  $f$  que prescinde da utilização do polinômio característico da malha aberta. O papel da controlabilidade fica explícito no termo  $U_a^{-1}$ . Em resumo:

### Algoritmo 1.3.4 — Alocação de Pólos via Ackerman

*Este algoritmo permite a escolha dos autovalores da malha fechada para sistemas com apenas uma variável de entrada e controláveis. As matrizes da malha aberta  $A$  e  $b$  são os dados iniciais, bem como o polinômio característico desejado para a malha fechada  $\Delta^*(s)$ .*

**Passo 1:** Calcular a matriz  $U_a$ , e a sua inversa.

**Passo 2:** Calcular  $\Delta^*(A)$

**Passo 3:** A matriz  $f = -[0 \ \cdots \ 0 \ 1]U_a^{-1}\Delta^*(A)$  é a realimentação procurada.

Hora boa para um exemplo. O qual, obviamente, será o mesmo já visto antes para os outros métodos.

**Exemplo 1.3.5** Desejamos alocar os autovalores da planta abaixo em  $-1$ :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

A matriz de controlabilidade da malha aberta e sua inversa são:

$$U_a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad U_a^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico desejado para a malha fechada é:  $\Delta^*(s) = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$  donde obtemos

$$\Delta^*(A) = (A + I)^3 = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 6 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Finalmente,

$$f = -[0 \ 0 \ 1]U_a^{-1}\Delta^*(A) = [-8 \quad -4 \quad 6]$$

como era de se esperar.

### 1.3.4 Comentários

Há outras maneiras de obter uma realimentação de estados capaz de alocar os autovalores de sistemas com apenas uma variável de entrada, como veremos nas próximas seções, ao tratar do caso multivariável, pois os resultados sempre podem ser particularizados para entradas escalares. Os métodos apresentados acima, entretanto, são quase sempre os menos trabalhosos, devendo estar entre os preferidos. E entre eles, qual o mais cômodo? Em primeira análise Ackerman poderia ser indicado, pois estamos desobrigados de calcular  $\Delta_a(s)$  e  $V_a$ . No entanto, na maioria das situações, conhecemos os

autovalores da planta, além das matrizes  $A$  e  $b$  de uma sua realização. Consequentemente, a obtenção do seu polinômio característico é direta. Quando este não for o caso, algoritmos como o de Leverrier fazem o serviço de maneira rápida e segura. Desta maneira, os métodos baseados na FCC ou na fórmula de Bass-Gura devem fazer parte do páreo, e fica difícil eleger o melhor método. Quase certamente, preferências individuais ditarão a escolha final.

## 1.4 Sistemas Com Várias Entradas

A procura de realimentações de estados capazes de alocar os autovalores de plantas com mais de uma variável de entrada será tratada a partir de agora. Como já mencionado anteriormente, alguns destes algoritmos se prestam a particularizações para o caso monoentrada. Deve-se lembrar ainda que a demonstração do teorema 1.2.2 está incompleta, pois foi feita apenas para o caso de entradas escalares. Permanecerá incompleta por pouco tempo.

Pode-se pensar em atacar o problema usando a força bruta, como foi feito para o caso mono: usando uma matriz  $F$  geral impomos a igualdade do polinômio característico de  $A + BF$  ao polinômio característico desejado  $\Delta^*(s)$  e equacionamos as restrições em termos dos elementos  $f_{ij}$ . No caso monoentrada este método era desprezado por ser muito trabalhoso, mas a solução do conjunto de equações, quando existia, era única. Agora as coisas ainda se complicam mais, pois haverá  $n$  equações e  $mn$  incógnitas, e o conjunto de equações pode ser indeterminado e apresentar mais de uma solução. A única finalidade de mencionar este método aqui é ilustrar o fato de o caso multientrada poder apresentar várias soluções  $F$  capazes de alocar autovalores.

Os métodos originais de se demonstrar que também neste caso multientrada a controlabilidade acarreta livre arbítrio na escolha da dinâmica da malha fechada envolvem formas especiais, onde as matrizes  $A$  e  $B$  se encontram decompostas em blocos particulares. Os métodos mais recentes procuram adaptar o problema ao caso escalar, cujos resultados são conhecidos e — vide seção anterior — relativamente simples, ou então usar equações matriciais.

Na próxima seção comentaremos o uso de formas especiais e canônicas. Veremos em seguida um lema devido a Heyman, onde um artifício permite controlar o sistema com apenas uma das variáveis de entrada. Alguns resultados genéricos virão depois, para mostrar que é relativamente fácil transformar um caso multientrada em monoentrada. Apresentaremos, no final, resultados diretos, que resolvem o problema sem o auxílio do caso mono. O

capítulo se encerra com considerações sobre outras propriedades tais como estabilizabilidade e detetabilidade, e com comentários.

### 1.4.1 Formas Especiais e Canônicas

Exemplos iniciais serão muito úteis para um bom entendimento dos mecanismos internos que possibilitam a resolução do problema.

**Exemplo 1.4.1** *Seja o sistema dado por*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

*O cálculo da matriz de controlabilidade  $U_a$  revelaria que este sistema é controlável. Seus autovalores podem ser encontrados facilmente, devido à estrutura diagonal por blocos da matriz  $A$ :  $\lambda(A) = \{1, 1, 1, 0, 0\}$ . Esta mesma estrutura permite que o estado  $x$  seja decomposto nas partes  $x_I$ , compreendendo suas três primeiras componentes, e  $x_{II}$ , com as duas últimas. A equação dinâmica acima se reduz a duas:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_I &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_I + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u \\ \dot{x}_{II} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_{II} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

*Estes subsistemas tem uma particularidade interessante: uma das colunas de suas matrizes  $B$  é nula. Isto significa que o estado de cada um deles é controlado por apenas uma componente da entrada. Seria fácil verificar que  $x_I$  é controlável por  $u_1$ , a primeira componente de  $u$ , e  $x_{II}$  por  $u_2$ . A tarefa de impor autovalores a estes subsistemas por meio de realimentações dos estados parciais fica trivial pois o primeiro deles já foi analisado várias vezes (exemplo 1.3.1 e outros), e o segundo subsistema já está na forma canônica controlável. Supondo que queremos colocar todos os autovalores em  $-1$ , basta usar*

$$u_1 = [-8 \quad -4 \quad 6] x_I \quad \text{e} \quad u_2 = [-1 \quad -2] x_{II}$$

*A partir deste ponto é imediato encontrar a matriz  $F$  que resolve o problema para o sistema original:*

$$F = \begin{bmatrix} -8 & -4 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

As estruturas particulares de  $A$  e de  $B$  permitiram que este exemplo fosse reduzido a dois casos monoentradas, cada um deles controlável pela sua única variável de entrada e com dimensão menor que a dimensão original do sistema. O fato de  $A$  ser diagonal por blocos teve um papel importante neste exemplo, mas não fundamental. Veremos agora que esta particular estrutura pode ser dispensada sem prejuízos para o desdobramento em subproblemas mais simples.

**Exemplo 1.4.2** *Seja o sistema dado por*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

*O cálculo de  $U_a$  revelaria que este sistema também é controlável. A matriz  $A$  não é mais diagonal por blocos, pois há elementos não nulos em posições estratégicas. Uma análise cuidadosa revela que estes impecilhos podem ser retirados por meio de uma realimentação de estados inicial. Os leitores são convidados a refletir sobre o papel de uma lei de controle  $u = F_0x + v$  com*

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -9 & -8 \\ -7 & -6 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*Viram só? O resultado é uma matriz  $A + BF_0$  “perfeitinha” que torna o resto do problema trivial. Supondo que queremos novamente os autovalores da malha fechada em  $\{-1\}$ , bastaria resolver dois problemas monoentradas. Composto estas duas soluções teríamos uma segunda realimentação  $F_1$ . Somando-a com a inicial obtemos a solução  $F$ :*

$$F = F_0 + F_1 = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 & -9 & -8 \\ -7 & -6 & -5 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

A conclusão destes exemplos é que a estrutura de alguns sistemas pode ser proveitosamente explorada para resolver o problema de realimentação de estados no caso multientrada. A essência do truque consiste em decompor o sistema original em  $m$  subsistemas, cada um deles com dimensão menor que  $n$  e controlável por apenas uma das componentes da entrada  $u$ . As soluções para cada subsistema são justapostas em uma única matriz. Os graus de liberdade restantes nesta matriz são utilizados para garantir a estrutura diagonal por blocos. Wonham(1967) foi, aparentemente, o primeiro a provar

que se um dado sistema é controlável, existe uma base no espaço de estados na qual as matrizes  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  apresentam todos os requisitos necessários para resolver o problema da alocação dos autovalores. Além do interesse histórico devido a seu pioneirismo, este método tem uma importância teórica muito grande, pois permite desvendar e detalhar a estrutura existente em um par controlável de matrizes.

### Extraindo Colunas Linearmente Independentes

Supondo que o sistema em questão é controlável, sua matriz de controlabilidade  $U_a$  terá posto  $n$ , ou seja, é possível selecionar  $n$  colunas linearmente independentes dentre as suas  $mn$  colunas. A partir destas colunas se monta a matriz de mudança de bases que facilita o trabalho de escolha dos autovalores. Mas a escolha destas colunas não é única, e isto faz com que haja várias possíveis soluções para o problema. Passamos agora a analisar dois métodos básicos para extrair colunas de  $U_a$ . Antes porém, lembremos que, sendo  $B = [b^1 \ b^2 \ \dots \ b^m]$ , onde  $b^i$  representa a  $i$ -ésima coluna, a matriz de controlabilidade será

$$U_a = [b^1 \ b^2 \ \dots \ b^m \ Ab^1 \ Ab^2 \ \dots \ Ab^m \ \dots \ A^{n-1}b^1 \ A^{n-1}b^2 \ \dots \ A^{n-1}b^m]$$

### Escolha Seqüencial ou Direta

Como o próprio nome diz, analisamos as colunas de  $U_a$  em seqüência, começando de  $b^1$  e avançando para a direita em direção a  $A^{n-1}b^m$ . Neste processo, sempre que uma dada coluna é linearmente dependente das colunas anteriores ela é descartada. O processo termina quando  $n$  colunas independentes forem encontradas.

**Exemplo 1.4.3** *Seja o sistema dado por*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

*A matriz  $A$  tem dois autovalores nulos e três iguais a 1. O cálculo da matriz de controlabilidade leva a*

$$U_a = [b^1 \ b^2 \ Ab^1 \ Ab^2 \ A^2b^1 \ A^2b^2 \ A^3b^1 \ A^3b^2 \ A^4b^1 \ A^4b^2]$$

$$U_a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 4 & 0 & 7 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 & 0 & -6 & 0 & -10 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 4 & 0 & 7 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 6 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Normalmente as colunas de  $B$  são independentes, e o processo de seleção começa mesmo com  $Ab^1$ , que no nosso caso entra, ou seja, forma com  $b^1$  e  $b^2$  um trio de vetores independentes. A quarta coluna,  $Ab^2$ , também se qualifica, como seria fácil verificar; o mesmo acontece com a quinta,  $A^2b^1$ . Assim, as colunas escolhidas pelo método seqüencial são  $b^1$   $b^2$   $Ab^1$   $Ab^2$   $A^2b^1$ .

O método seqüencial de escolha de colunas pode ser usado para colocar as matrizes do sistema em uma base cômoda para a alocação de autovalores. Para isto reordenaríamos as colunas encontradas em cadeias associadas a cada uma das  $m$  colunas de  $B$ . A primeira cadeia seria  $b^1$   $Ab^1$   $A^2b^1$  ... ; a segunda seria  $b^2$   $Ab^2$   $A^2b^2$  ... e assim por diante. Colocando estas cadeias lado a lado se obtém a matriz de mudança de base.

Para o exemplo anterior há duas cadeias:  $b^1$   $Ab^1$   $A^2b^1$ , com três vetores, e  $b^2$   $Ab^2$ , com apenas dois. A matriz

$$Q = [b^1 \quad Ab^1 \quad A^2b^1 \quad b^2 \quad Ab^2]$$

é a procurada transformação de equivalência.

Este método é de aplicação simples, e os leitores são convidados a terminar o exemplo e analisar as matrizes na nova base. Apesar desta facilidade, ele produz uma forma **Especial** e não uma forma **Canônica**. Qual a diferença? Vamos supor que as matrizes  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são equivalente a  $A$  e  $B$ . Se o procedimento acima for aplicado a estas matrizes “chapeladas” encontraremos, na nova base, matrizes diferentes. Tentem, leitores! Outro aspecto: as matrizes obtidas facilitam o problema de escolher autovalores, mas não tanto, há coisas mais cômodas.

## Escolha Intercalada ou Reordenada

O primeiro passo consiste em reordenar as colunas de  $U_a$ , começando com  $b^1$   $Ab^1$  ...  $A^{n-1}b^1$  depois com  $b^2$  e sua cadeia. Após esta troca de ordem começa o processo de seleção, pela esquerda, e descartando colunas que dependam das anteriores. Como antes, o processo termina quando  $n$  colunas independentes forem encontradas.

**Exemplo 1.4.4** *Seja o sistema anterior, dado por*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

*O cálculo da matriz de controlabilidade leva ao mesmo resultado do exemplo anterior. Trocando a ordem das colunas temos*

$$U_a^i = [b^1 \ Ab^1 \ A^2b^1 \ A^3b^1 \ A^4b^1 \ b^2 \ Ab^2 \ A^2b^2 \ A^3b^2 \ A^4b^2]$$

$$U_a^i = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 11 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -6 & -10 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 7 & 11 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*onde as 5 primeiras colunas se originam de  $b^1$ , e as 5 últimas de  $b^2$ .*

*As três primeiras colunas são linearmente independentes e seriam escolhidas pelo processo; a quarta e a quinta colunas dependem das três primeiras, mas a sexta e a sétima não e a seleção final é  $b^1 \ Ab^1 \ A^2b^1 \ b^2 \ A^2b^2$ , idêntica à do exemplo anterior. É bom frizar que **isto não ocorre sempre!***

O método intercalado de escolha de colunas pode ser usado para colocar as matrizes do sistema em uma base cômoda para a alocação de autovalores. Para isto usamos as colunas na ordem em que foram obtidas, e

$$Q = [b^1 \ Ab^1 \ A^2b^1 \ b^2 \ Ab^2]$$

é a procurada transformação de equivalência.

As mesmíssimas observações feitas para o método seqüencial devem ser feitas neste ponto. Algo melhor que uma forma especial, uma forma realmente **canônica** e que conduza a resultados idênticos independentemente do ponto de partida, é a nossa próxima parada.

## Forma Canônica do Controlador



Deve-se, em primeiro lugar, extrair  $n$  colunas linearmente independentes da matriz de controlabilidade  $U_a$  **usando o método direto**. Também se poderia usar o método intercalado, mas os procedimentos ficariam mais trabalhosos. Para evitar notações e formalismos pesados, com toneladas de índices e sub-índices abstrusos, ilustraremos o método por meio de um exemplo, não por acaso o mesmo que tem sido usado até agora.

**Exemplo 1.4.5** *Seja o sistema anterior, dado por*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

O método sequencial escolheria as colunas  $b^1$   $b^2$   $Ab^1$   $Ab^2$   $A^2b^1$ , como vimos. Reordenando-as obtemos as cadeias  $b^1$   $Ab^1$   $A^2b^1$  e  $b^2$   $Ab^2$ . A matriz obtida pela justaposição dessas cadeias é chamada agora de  $T$

$$T = [b^1 \quad Ab^1 \quad A^2b^1 \quad b^2 \quad Ab^2]$$

No próximo passo cuidaremos dos elementos seguintes em cada uma das cadeias:  $A^3b^1$  para a primeira cadeia e  $A^2b^2$  para a segunda. Cada um destes vetores é expresso como uma combinação linear dos vetores básicos:

$$A^3b^1 = \alpha_1 b^1 + \alpha_2 Ab^1 + \gamma_1 A^2b^1 + \delta_1 b^2 + \epsilon_1 Ab^2$$

e

$$A^2b^2 = \alpha_2 b^1 + \alpha_2 Ab^1 + \gamma_2 A^2b^1 + \delta_2 b^2 + \epsilon_2 Ab^2$$

Uma maneira sistemática para obter estes coeficientes é

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \gamma_1 \\ \delta_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} = T^{-1} A^3b^1 \quad e \quad \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \\ \delta_2 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix} = T^{-1} A^2b^2$$

Para o nosso caso temos

$$A^3b^1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ 7 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} = b^1 - 3Ab^1 + 3A^2b^1 + 0b^2 + 0Ab^2$$

que forma a chamada **expressão expandida para a cadeia 1**. Para a outra cadeia

$$A^2b^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0b^1 + 0Ab^1 + 0A^2b^1 + 0b^2 + 0Ab^2$$

As expressões expandidas são agora reescritas, com todas as potências não nulas de  $A$  no lado esquerdo:

$$A^3b^1 - 3A^2b^1 + 3Ab^1 - 0Ab^2 = b^1 + 0b^2$$

e

$$A^2b^2 - 0A^2b^1 - 0Ab^2 - 0Ab^1 = 0b^1 + 0b^2$$

Na expressão para a cadeia 1 pode-se colocar  $A$  em evidência, pela esquerda, claro; os elementos com coeficientes nulos passam a ser ignorados.

$$A(A^2b^1 - 3Ab^1 + 3b^1) = b^1$$

ou, equivalentemente

$$A\xi_{13} = b^1 \quad \text{onde} \quad \xi_{13} = A^2b^1 - 3Ab^1 + 3b^1$$

Novamente as potências não nulas de  $A$  são isoladas

$$A^2b^1 - 3Ab^1 = \xi_{13} - 3b^1$$

e um novo batismo é feito, após fatorar pela esquerda o primeiro membro

$$A\xi_{12} = \xi_{13} - 3b^1 \quad \text{onde} \quad \xi_{12} = Ab^1 - 3b^1$$

O último passo para esta cadeia é claro:

$$Ab^1 = \xi_{12} + 3b^1 \quad \text{donde} \quad \xi_{11} = b^1$$

A segunda cadeia, para este exemplo, é trivialmente simples:  $A^2b^2 = 0$ , donde  $A(Ab^2) = 0$  donde

$$\xi_{22} = Ab^2 \quad e \quad \xi_{21} = b^2$$

Os  $\xi_{ij}$ , em ordem crescente da soma  $i + j$  para cada cadeia, dão origem à matriz de mudança de bases:

$$Q = [\xi_{11} \ \xi_{12} \ \xi_{13} \ \xi_{21} \ \xi_{22}]$$

*Para os valores numéricos deste exemplo temos*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*A transformação de similaridade  $x = Q\hat{x}$  levaria a*

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

*cuja estrutura facilita bastante o problema de alocação de autovalores, conforme o prometido.*

Os dados numéricos do exemplo anterior permitem uma forma canônica muito particular, pois a matriz  $\hat{A}$  é diagonal por blocos. Nem sempre isto acontecerá.

Analisando os blocos não nulos de  $\hat{A}$  percebemos que eles se apresentam em uma forma companheira diferente da conhecida: a diagonal com elementos unitários é a inferior (e não a superior) e a linha com os coeficientes do polinômio característico é a primeira (e não a última). Estas ligeiras mudanças acontecem também nas linhas de  $\hat{B}$ , onde os elementos não nulos ocupam a primeira linha de cada bloco, e não a última. Tais diferenças são superficiais, a facilidade de alocar autovalores permanece intacta.

Os leitores são convidados a reordenar as colunas de  $Q$  de modo que, em cada cadeia, a soma dos índices  $i + j$  seja decrescente:

$$Q = [\xi_{13} \ \xi_{12} \ \xi_{11} \ \xi_{22} \ \xi_{21}]$$

Que acontecerá? Outro exemplo, para ilustrar aspectos adicionais.

**Exemplo 1.4.6** *Seja o sistema dado por*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & -4 & -7 & 2 & -7 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

O método sequencial, como os leitores certamente verificarão, escolheria as colunas  $b^1$   $b^2$   $Ab^1$   $Ab^2$   $A^2b^1$ . Reordenando-as obtemos as cadeias  $b^1$   $Ab^1$   $A^2b^1$  e  $b^2$   $Ab^2$ . A matriz  $T$  obtida pela justaposição dessas cadeias é

$$T = [b^1 \quad Ab^1 \quad A^2b^1 \quad b^2 \quad Ab^2] = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -10 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -8 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 12 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No próximo passo descreveremos os vetores  $A^3b^1$  e  $A^2b^2$  como combinações lineares dos vetores básicos:

$$A^3b^1 = \begin{bmatrix} 21 \\ 21 \\ -31 \\ -20 \\ 4 \end{bmatrix} = -2b^1 - 5Ab^1 - 4A^2b^1 + 2b^2 + Ab^2$$

que é a expressão expandida para a cadeia 1. Para a outra cadeia:

$$A^2b^2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -12 \\ 8 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = 0b^1 + 0Ab^1 + 0A^2b^1 - 4b^2 - 4Ab^2$$

As expressões expandidas são agora reescritas, com todas as potências não nulas de  $A$  no lado esquerdo:

$$A^3b^1 + 4A^2b^1 + 5Ab^1 - Ab^2 = -2b^1 + 2b^2$$

e

$$A^2b^2 + 4Ab^2 = -4b^2$$

Na expressão para a cadeia 1 pode-se colocar  $A$  em evidência.

$$A(A^2b^1 + 4Ab^1 + 5b^1 - b^2) = -2b^1 + 2b^2$$

ou, equivalentemente

$$A\xi_{13} = -2b^1 + 2b^2 \quad \text{onde} \quad \xi_{13} = A^2b^1 + 4Ab^1 + 5b^1 - b^2$$

Novamente as potências não nulas de  $A$  são isoladas

$$A^2b^1 + 4Ab^1 = \xi_{13} - 5b^1 + b^2$$

e outro batismo é feito

$$A\xi_{12} = \xi_{13} - 5b^1 + b^2 \quad \text{onde} \quad \xi_{12} = Ab^1 + 4b^1$$

O último passo para esta cadeia é  $Ab^1 = \xi_{12} - 4b^1$  donde  $\xi_{11} = b^1$ . A segunda cadeia fica

$$A(Ab^2 + 4b^2) = -4b^2 \quad \text{donde} \quad \xi_{22} = Ab^2 + 4b^2$$

e, finalmente,  $Ab^2 = \xi_{22} - 4b^2$  donde  $\xi_{21} = b^2$ .

Os  $\xi_{ij}$ , em ordem crescente da soma  $i + j$  para cada cadeia, dão origem à matriz de mudança de bases:

$$Q = [\xi_{11} \ \xi_{12} \ \xi_{13} \ \xi_{21} \ \xi_{22}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Na nova base:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

A estrutura é agora “apenas” triangular por blocos, mas os procedimentos para se alocar autovalores continuam simples e diretos, como continuariam sempre, pois esta forma canônica serve exatamente para isto!

### 1.4.2 Lema de Heyman

Este método utilizará uma realimentação de estados preliminar para garantir a controlabilidade da malha aberta por apenas uma das componentes da entrada. Sendo  $B = [b^1 \ b^2 \ \dots \ b^m]$ , a matriz de controlabilidade será

$$U_a = \begin{bmatrix} b^1 & b^2 & \dots & b^m & Ab^1 & Ab^2 & \dots & Ab^m & \dots & A^{n-1}b^1 & \dots & A^{n-1}b^m \end{bmatrix}$$

Se existir uma coluna  $b^i$  em  $B$  tal que  $[b^i \ Ab^i \ \dots \ A^{n-1}b^i]$  tenha posto completo ( $= n$ ), então a malha aberta será controlável apenas pela componente  $u_i$  da entrada, podendo as restantes se anular: não há necessidade delas e poderemos usar as técnicas já vistas para o caso monoentrada. Escolheríamos  $f$  tal que  $\lambda(A + bf) = \lambda^*$  por qualquer um dos métodos já vistos para o caso monoentrada, e a solução para o problema com várias entradas seria uma matriz  $F(m \times n)$  onde a única linha não nula é a  $i$ -ésima:

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ f \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

O próximo resultado, conhecido como Lema de Heyman, trata dos casos onde esta situação simplificadora não é encontrada e precisamos de um esforço conjunto de todas as componentes da entrada  $u$  para controlar o sistema.

**Teorema 1.4.1** *Sendo o sistema de malha aberta  $\langle A, B \rangle$  controlável e  $B = [b^1 \ b^2 \ \dots \ b^m]$  então, para todo  $i = 1, 2, \dots, m$  com  $b^i \neq 0$  existe  $F_i$  tal que o par  $\langle A + BF_i, b^i \rangle$  é controlável.*

Esta é mais uma das proezas da realimentação de estados. Por meio dela podemos fazer um sistema ser controlável por apenas uma componente da entrada. Se há controlabilidade, ou seja, se, usando a entrada, temos acesso total ao espaço de estados, poderemos modificar-lhe a estrutura de tal maneira que apenas uma parte mínima da entrada original seja suficiente para continuar influenciando completamente o espaço de estados rearranjado! Ao invés de uma prova completa do lema mostraremos apenas como encontrar uma matriz  $F_i$  com as características desejadas. Para isso, seja a matriz de controlabilidade, reescrita após um reordenamento de suas colunas:

$$U_a = \begin{bmatrix} b^1 & Ab^1 & \dots & A^{n-1}b^1 & b^2 & \dots & A^{n-1}b^2 & b^3 & \dots & A^{n-1}b^3 \end{bmatrix}$$

onde estamos considerando  $m = 3$  por comodidade; isto não afeta a generalidade do método. Sendo o sistema controlável, podemos extrair de  $U_a$  uma matriz  $Q(n \times n)$ , não singular, da seguinte maneira:

$$Q = \begin{bmatrix} b^1 & Ab^1 & \dots & A^{\nu_1-1}b^1 & b^2 & \dots & A^{\nu_2-1}b^2 & b^3 & \dots & A^{\nu_3-1}b^3 \end{bmatrix}$$

com os inteiros  $\nu_i$  escolhidos de modo a termos  $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = n$ . Notemos que esta é apenas uma possível escolha de  $n$  colunas linearmente independentes da matriz  $U_a$ . Seja a matriz  $S(m \times n)$  com colunas nulas exceto as  $\nu_1$ -ésima,  $(\nu_1 + \nu_2)$ -ésima etc, que serão substituídas pelos vetores  $e_2, e_3$ , etc.

$$S = [0 \ 0 \ \dots \ e_2 \ 0 \ \dots \ e_3 \ 0 \ \dots \ 0]$$

onde o vetor  $e_i$  é a  $i$ -ésima coluna da matriz identidade  $(m \times m)$ . Usando  $F_1 = SQ^{-1}$  mostraríamos que  $\langle A + BF_1, b^1 \rangle$  é controlável, exatamente como desejávamos. Neste arrazoado usamos uma realimentação que torna o sistema controlável pela primeira componente da entrada (primeira coluna de  $B$ ); não há perda de generalidade nisto, visto que podemos alterar à vontade a ordem das colunas de  $B$ . Já estamos em condições de terminar a demonstração da suficiência do teorema 1.2.2, da alocação dos autovalores: sendo  $\langle A, B \rangle$  controlável escolhemos, a partir do lema anterior, uma matriz  $F^1$ , tal que com  $u(t) = F^1x(t) + w(t)$  tenhamos o sistema

$$\dot{x}(t) = (A + BF^1)x(t) + Bw(t)$$

controlável pela primeira componente de  $w$  (primeira coluna de  $B$ ). Agora escolhemos  $w(t) = Mx(t) + v(t)$  onde  $M(m \times n)$  tem linhas nulas exceto a primeira:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Após esta segunda realimentação ficamos com

$$\dot{x}(t) = (A + BF^1 + BM)x(t) + Bv(t)$$

Como  $BM = b^1m_1$  e  $\langle A + BF_1, b^1 \rangle$  é controlável por construção, os autovalores deste último sistema podem ser livremente designados por escolha de  $m_1$ . Para o sistema original devemos usar a lei de controle  $u(t) = Fx(t) + v(t)$  com  $F = F_1 + M$ .

**Exemplo 1.4.7** *Seja o sistema dado por*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

*O cálculo da matriz de controlabilidade, com as colunas reordenadas leva a*

$$U_a = [b^1 \ Ab^1 \ A^2b^1 \ A^3b^1 \ A^4b^1 \ b^2 \ Ab^2 \ A^2b^2 \ A^3b^2 \ A^4b^2]$$

$$U_a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 11 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -6 & -10 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 7 & 11 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*onde as 5 primeiras colunas se originam de  $b^1$ , e as 5 últimas de  $b^2$ . O posto desta matriz é completo, mas no entanto esta controlabilidade requer uma cooperação entre as duas componentes do vetor de controle  $u$ , pois as 5 primeiras colunas de  $U_a$  são linearmente dependentes, assim como as 5 últimas. Verificaríamos que  $\nu_1 = 3$  e  $\nu_2 = 2$ , após o que poderíamos calcular  $Q$  e  $S$ , obtendo*

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*A aplicação da fórmula leva à realimentação preliminar:*

$$F_1 = SQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*O leitor interessado verificaria que a matriz*

$$A + BF_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*e a primeira coluna de  $B$  formam um par controlável. É interessante notar que, neste exemplo, os autovalores de  $A + BF_1$  são idênticos aos de  $A$ .*



## 1.5 Resultados Genéricos

Uma propriedade é chamada de **genérica** quando acontece “quase sempre”. A invertibilidade de uma matriz quadrada, por exemplo, é uma propriedade genérica. Isto quer dizer que uma matriz quadrada tomada ao acaso será quase certamente inversível. Um detalhamento mais rigoroso destas idéias não será visto nestas linhas, ficaremos apenas com a idéia intuitiva. Por este motivo, alguns resultados que poderiam ser criteriosamente estabelecidos serão apresentados como fatos.

**Fato 1.5.1** *Dada uma matriz quadrada  $A$  qualquer, ela terá “quase sempre” autovalores distintos.*

Mas se os autovalores de uma matriz  $A$  são distintos, ela é cíclica e, por definição, haverá um vetor  $g$ , chamado gerador, tal que os vetores

$$g, \quad Ag, \quad \dots A^{n-1}g$$

são linearmente independentes. Este é uma conceito matemático conhecido, mas as conexões com controlabilidade saltam à vista. Com efeito, se a matriz  $A$  de um dado sistema  $\langle A, B \rangle$  é cíclica, e se uma combinação linear das colunas de  $B$  for um gerador, então o sistema será controlável por apenas uma variável de entrada!

**Fato 1.5.2** *Sendo  $A$  uma matriz quadrada cíclica, quase todo vetor  $v \in \mathbb{R}^n$  será um gerador.*

É fácil entender isto. Se  $A$  é cíclica, apenas os autovetores não são geradores. Assim, sendo  $A$  cíclica, quase qualquer vetor é um gerador, e por isto, quase qualquer combinação linear das colunas de  $B$  será um gerador, desde que as colunas de  $B$  não sejam autovetores. De maneira mais completa temos

**Teorema 1.5.1** *Sendo  $\langle A, B \rangle$  um sistema controlável com  $A$  cíclica, e sendo  $b = \alpha_1 b^1 + \alpha_2 b^2 + \dots + \alpha_m b^m$  uma combinação linear qualquer das colunas de  $B$ , então  $\langle A, b \rangle$  será quase certamente controlável.*

Na seção anterior toda a ênfase era concentrada na busca de uma realimentação de estados preliminar que fizesse com que um sistema controlável pelo esforço conjunto de todas as componentes da entrada passasse a sê-lo pela ação individual de apenas uma delas. Os resultados desta seção mostram que não é necessário tanto alarde, pois esses objetivos são na realidade genéricos, isto é, acontecem quase sempre.

Para sistematizar o procedimento, considere uma planta controlável, com  $A$  cíclica, e seja  $u^0$  um vetor escolhido ao acaso em  $\mathbb{R}^m$ . É claro que  $Bu^0 = b$  representa uma combinação linear das colunas de  $B$ . O teorema acima garante que  $\langle A, b \rangle$  será controlável, quase certamente. Se não o for, uma outra escolha aleatória de  $u^0$  consertará as coisas. Usando a teoria do caso monoentrada escolheríamos  $f$  tal que  $A + bf$  tivesse o espectro desejado. Mas  $A + bf = A + Bu^0 f$ , e assim, a solução procurada para o sistema original  $\langle A, B \rangle$  será  $F = u^0 f$ . Resta considerar o caso de  $A$  não ser cíclica. Antes disso é bom relembrar que as matrizes quadradas são cíclicas de maneira genérica. Se uma dada  $A$  não é cíclica isto pode ser corrigido facilmente:

**Teorema 1.5.2** *Se  $\langle A, B \rangle$  é controlável, para quase toda  $F$  os autovalores de  $A + BF$  são distintos.*

Mas autovalores distintos significam que a matriz é cíclica. No nosso contexto isto quer dizer que se  $A$  não for cíclica, uma realimentação de estados preliminar se faz necessária. Esta realimentação pode ser escolhida ao acaso.

**Exemplo 1.5.1** *Considere o sistema*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

*Este sistema é controlável, mas no entanto não existe  $u_0$  tal que  $A$  e  $Bu_0 = b$  formem um par controlável! A falta de ciclicidade de  $A$  é a responsável por este fato. Seja uma realimentação de estados qualquer, por exemplo*

$$F_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

*A malha fechada passa a ser representada por*

$$A + BF_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

*Esta matriz é cíclica. A segunda coluna de  $B$  é um gerador, como pode ser verificado, e isto garante a controlabilidade por uma combinação linear das colunas de  $B$ .*

Podemos resumir estes resultados no

### Algoritmo 1.5.1 — Alocação de Pólos via Escolhas Aleatórias

*Este algoritmo permite a designação dos autovalores da malha fechada para sistemas controláveis. As matrizes da malha aberta  $A$  e  $B$  são os dados iniciais.*

**Passo 1:** Se  $A$  é cíclica, escolha  $u^0 \in \mathbb{R}^m$  ao acaso.

**Passo 2:** Faça  $Bu_0 = b$ .

**Passo 3:** Se  $A$  e  $b$  forem controláveis encontre a solução  $f$  usando um método do caso mono.

**Passo 4:** A solução global será  $F = u_0 f$ .

**Passo 5:** Se  $A$  e  $b$  não forem controláveis retorne ao passo 1.

**Passo 6:** Se  $A$  não é cíclica, escolha  $F_0(m \times n)$  ao acaso.

**Passo 7:** Se  $A + BF_0$  é cíclica vá ao passo 1.

**Passo 8:** Se  $A + BF_0$  não é cíclica vá ao passo 6.

## 1.6 Método Matricial

Supondo controlabilidade da malha aberta, seja  $M$  ( $n \times n$ ) com espectro idêntico ao que desejamos impor à malha fechada. Isto quer dizer que

$$A + BF = XM X^{-1}$$

onde  $F$  é a matriz procurada e  $X$  representa uma mudança de bases. A equação acima pode ser trabalhada:

$$\begin{aligned} AX + BFX &= XM \\ AX - XM &= -BFX \end{aligned}$$

Há métodos para se resolver equações matriciais como a acima. Isto sugere um algoritmo para o problema de alocação de autovalores:

### Algoritmo 1.6.1 — Alocação de Pólos via Método Matricial

*Este algoritmo permite a escolha dos autovalores da malha fechada para sistemas controláveis. As matrizes da malha aberta  $A$  e  $B$  são os dados iniciais.*

**Passo 1:** Escolha  $M$  ( $n \times n$ ) tal que  $\lambda(M) \cap \lambda(A) = \emptyset$ .

**Passo 2:** Escolha  $N$  ( $m \times n$ ) tal que  $\langle M, N \rangle$  é observável.

**Passo 3:** Encontre  $X$  ( $n \times n$ ) tal que  $AX - XM = -BN$

**Passo 4:** Se  $X$  é inversível,  $F = NX^{-1}$  é tal que  $\lambda(A + BF) = \lambda(M)$ . Se  $X$  não é inversível o procedimento deve ser repetido.

Os dois primeiros itens são necessários para que a equação matricial do terceiro tenha uma solução  $X$  única. Deste modo, se quisermos impor à malha fechada um espectro que deixa inalterados alguns dos autovalores da malha aberta, poderá haver problemas na unicidade das soluções da equação matricial.

Este método pode ser aplicado para sistemas com apenas uma entrada.

## 1.7 Método dos Autovetores

## 1.8 Efeito sobre os Zeros

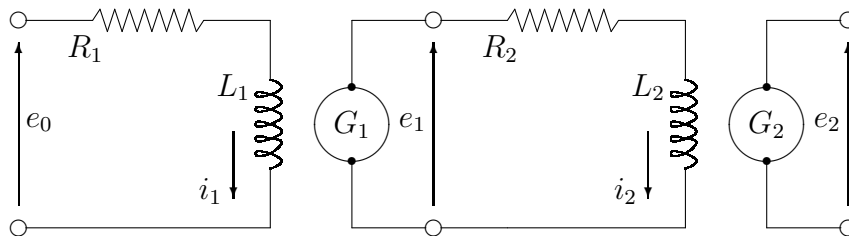
## 1.9 Injeção de Saída

## 1.10 Estabilizabilidade e Detetabilidade

## 1.11 Comentários, Conclusões e Referências

## 1.12 Exercícios

1. Dado o sistema



considere  $e_1 = 20i_1$ ,  $e_2 = 50i_2$ ,  $R_1/L_1 = 10$ ,  $R_2/L_2 = 1$ ,  $R_1 = 5$ ,  $R_2 = 10$ .

- (a) Tomando como variáveis de estado  $x_1 = i_1$  e  $x_2 = i_2$ , como saída  $y = e_2$  e como entrada  $u = e_0$ , determine a representação de estados do sistema.
- (b) Calcule a função de transferência.
- (c) Com a lei de controle  $u = fx$  mostre que é possível colocar os autovalores da malha fechada em qualquer posição no plano complexo. Calcule  $f$  para tê-los em  $\{-10, -10\}$ .
- (d) Implementando-se a lei de controle mais simples  $u = f_2 y$  mostrar que não é mais possível colocar os pólos do sistema de malha fechada em qualquer lugar do plano complexo. Determine  $f_2$  para termos os pólos em  $\{-5.5 \pm j5.5\}$ .

2.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

Encontrar uma realimentação de estados  $u = fx$  de tal modo que os autovalores do sistema de malha fechada sejam todos iguais a  $-5$ .

- (a) Resolver o problema acima “na marra” isto é, calcular o polinômio característico da matriz  $A + bf$  e impor a condição.
- (b) Resolver o problema após uma mudança de bases para a forma canônica controlável e por Ackerman.
- (c) Comparar o grau de dificuldade e trabalho dos métodos.

3.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad y = [2 \quad -9 \quad 8]x$$

- (a) Encontrar  $f$  tal que usando  $u = fx$  a função de transferência  $g_f(s)$  do sistema de malha fechada tenha seus três pólos em  $-1$ .
- (b) idem tal que  $g_f(s) = 1/(s+1)$ .

4.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

O sistema acima é instável. Estabilizá-lo consiste em usar realimentação para que todos os autovalores tenham parte real negativa. Encontrar uma realimentação de estados  $u = fx$  de modo que o novo espectro seja

$$\lambda(A_f) = \lambda(A + bf) = \{-1, -1, -2, -2, -2\}$$

5. Um SLIT monovariável é completamente caracterizado por

$$g(s) = \frac{s + 2}{s(s + 1)(s - 1)^2}$$

- (a) Encontrar, se possível, leis de controle por realimentação de saída que estabilizem o sistema (coloquem todos os seus pólos no semi-plano esquerdo aberto do plano complexo).
- (b) idem (a) para realimentação de estados.
- (c) Encontrar, se possível, uma lei de controle tal que a malha fechada tenha como função de transferência  $g_f(s) = 1/(s + 1)^3$

6.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

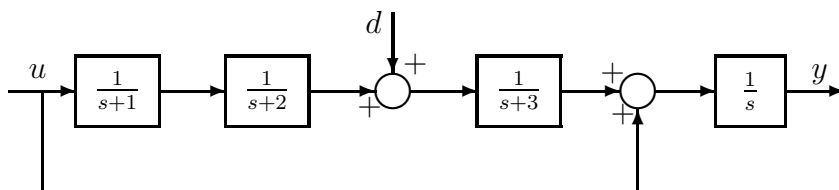
- (a) Encontrar, se possível, uma realimentação de estados que coloque todos os autovalores da malha fechada em  $-1$ .
- (b) idem (a) para  $-2$ .
- (c) Encontrar, se possível, uma expressão geral para as leis de controle que estabilizam o sistema.

7.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

- (a) Encontrar, se possível, as realimentações de estados que fazem com que  $v = [1 \ 1 \ 1]^T$  seja um autovetor na matriz  $A_f = A + bf$ . Neste caso, quem serão os autovalores da malha fechada?
- (b) idem (a) de tal modo que  $v_1 = [1 \ 1 \ 1]^T$  e  $v_2 = [1 \ -1 \ 1]^T$  sejam dois dos autovetores de  $A + bf$ .

- (c) Ainda a mesma coisa, agora queremos que os autovetores da malha fechada sejam  $v_1 = [1 \ 1 \ 1]^T$ ,  $v_2 = [1 \ -1 \ 1]^T$ , e  $v_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ .
- (d) Generalize os resultados do exercício acima: é sempre possível encontrar uma lei de controle  $u = fx$  tal que os *autovetores* da malha fechada  $A + bf$  sejam livremente designáveis? Se sim, que acontece com os *autovalores*, ficam amarrados ou ainda temos liberdade para posicioná-los?
- (e) (opcional) Estude o problema acima para um sistema  $\langle A, B \rangle$  genérico. Quais seriam as condições para livre designabilidade dos autovetores?
8. Para o sistema abaixo  $u$  é a entrada de controle,  $y$  é a saída e  $d$  é uma entrada de distúrbio que pode assumir um valor desconhecido qualquer. “Rejeitar completamente os distúrbios” significa controlar o sistema de maneira tal que o efeito dos distúrbios  $d$  — *quaisquer que sejam eles* — não se faça sentir em  $y$ . Como a natureza desses distúrbios é vasta e praticamente irrestrita conseguiremos sua rejeição completa se e somente se a função de transferência entre  $d$  e  $y$  for identicamente nula.



- (a) Encontrar, se possível, uma realimentação de saída  $u = ky$  que rejeite completamente os distúrbios. Traçar o diagrama de blocos para o sistema de malha fechada e dizer quem são seus pólos.
- (b) idem (a) para uma realimentação de estados  $u = fx$ .

9.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} u$$

- (a) Encontrar uma lei de controle  $u = F_I x + v$  que faça com que a malha fechada seja controlável pela primeira componente da entrada.

- (b) Encontrar uma lei de controle  $u = F_{II}x + v$  que faça com que a malha fechada seja controlável pela segunda componente da entrada.
- (c) Encontrar as todas as matrizes  $F$  que acarretam  $\lambda(A + BF) = \{-1, -1, -1, -1\}$

10.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad y = [1 \quad -1 \quad 1]x + du$$

- (a) Para  $d = 0$  encontrar uma realimentação de estados que coloque os 3 pólos em -1.
- (b) Para  $d = 0$  encontrar  $f$  tal que com  $u = fx + v$  tenhamos

$$c(sI - A - bf)^{-1}b + d = \frac{1}{s + 1}.$$

- (c) idem (a) para  $d = 1$ .
- (d) idem (b) para  $d = 1$ .
- (e) Para  $d = 1$  encontrar, se possível, todas as realimentações de estado  $u = fx + v$  que estabilizam o sistema e ao mesmo tempo colocam seus zeros também no semiplano esquerdo aberto do plano complexo.
- (f) O item (e) seria mais facilmente estudado se tivéssemos uma lei de controle mais completa  $u = fx + gv$ , onde  $g$  é um escalar?

11.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

Encontrar uma realimentação de estados que coloque todos os autovalores do sistema em  $-1$ .

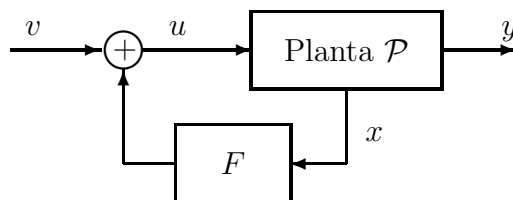


## Capítulo 2

# Realimentação de Estados Prática

### 2.1 Introdução

Na década de 50 descobriu-se que a solução de alguns problemas de Controle Ótimo requeria o uso de uma combinação linear das variáveis de estado como entrada do sistema. Talvez este tenha sido o primeiro indício da importância de se realimentar os estados, e passou-se a prestar mais atenção nessa ferramenta. Foi notado que tudo o que se conseguia fazer com realimentação das saídas também se conseguia fazer com realimentação dos estados, mas o caminho inverso era falso. O ponto culminante foi a descoberta da conexão entre controlabilidade e a alocação arbitrária dos autovalores. Desde esse ponto a realimentação de estados passou a ser reconhecida como uma ferramenta extremamente poderosa, cujo uso deve ser tentado em qualquer situação onde se deseja mudar as características de um sistema, ou, usando outras palavras, em qualquer situação onde o Controle de um sistema se faça necessário.



Nas aplicações práticas, porém, temos em mãos apenas a saída mensurável  $y$ , e não o estado  $x$  da planta. Este é inacessível, pelo menos em parte, e

não podemos utilizá-lo na realimentação. Em muitos casos isto acontece por razões econômicas, pois pode ser caro instalar sensores para medir todas as variáveis de estado. Em outras situações pode haver impossibilidade física de se alcançar algumas variáveis, ou então a presença do sensor pode alterar significativamente o modelo considerado para a planta. Vejamos, com o auxílio de um exemplo, o efeito destes fatos.

**Exemplo 2.1.1** *Para o sistema abaixo desejamos escolher uma lei de controle  $u = Fx$  de tal maneira que o polinômio característico da malha fechada seja  $\Delta^*(s) = s^3 + a_2^*s^2 + a_1^*s + a_0^*$ .*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

*Como a equação dinâmica acima já se encontra na forma canônica controlável, a solução desejada pode ser encontrada de maneira direta:*

$$F = \begin{bmatrix} -1 - a_0^* & -2 - a_1^* & -3 - a_2^* \end{bmatrix}$$

*Supondo que apenas as componentes da saída mensurável  $y$  — no caso, a primeira variável  $x_1$  — são fisicamente acessíveis para realimentação, os ganhos que multiplicam as variáveis  $x_2$  e  $x_3$  devem ser nulos:  $-2 - a_1^* = 0$  e  $-3 - a_2^* = 0$ , o que acarreta  $a_1^* = -2$  e  $a_2^* = -3$ . Isto significa que o polinômio característico da malha fechada será dado por*

$$s^3 - 3s^2 - 2s + a_0^*$$

*onde nem mesmo a estabilidade pode ser garantida, pois o polinômio acima indica comportamento instável para qualquer valor do parâmetro livre  $a_0^*$ .*

Este exemplo mostra que a imensurabilidade de certas variáveis é um sério obstáculo à eficiência das técnicas de compensação por meio de realimentação de estados. Como usar estas técnicas se nem sempre todas as componentes do vetor  $x$  estão disponíveis? Estes inconvenientes não são simples devaneios, possibilidades matemáticas remotas. Na maior parte das situações de interesse prático é impossível medir o estado de forma global, e esta é uma restrição importante. Como a realimentação de estados é uma ferramenta poderosa e atraente, devemos buscar métodos para contornar seus obstáculos e poder desfrutar de seus benefícios. As soluções encontradas ao longo do tempo para resolver este problema podem ser agrupadas em três grandes categorias:

- **Técnicas de Recuperação do Estado:**

De alguma maneira encontramos e usamos o estado perdido.

- **Técnicas de Substituição do Estado:**

Construimos um estado “equivalente” que possa ser usado como substituto do estado inacessível.

- **Técnicas de Transformação do Problema:**

Transformamos o problema de realimentação de estados em um problema de realimentação de saída.

Nas próximas seções discutiremos alguns aspectos das alternativas acima.

## 2.2 Técnicas de Recuperação do Estado

Devemos, de algum modo, resgatar o estado inacessível, recuperá-lo. Há duas maneiras básicas para atingir essa meta:

1. Por derivação de saídas e entradas
2. Por reconstrução do modelo

### 2.2.1 Derivando saídas e entradas

Para entender como a derivação funciona, comecemos com um

**Exemplo 2.2.1** *Seja o sistema:*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

*com saída mensurável dada por*

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = Cx$$

*É fácil verificar que este sinal e suas derivadas são dados por:*

$$\begin{aligned} y &= Cx = x_1 \\ \dot{y} &= C\dot{x} = CAx + CBu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x = x_2 \\ \ddot{y} &= CA(Ax + Bu) + CB\dot{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = x_3 \end{aligned}$$

Este simples exemplo ilustra como a saída de um sistema dinâmico e suas derivadas podem trazer em si informações suficientes para a reconstituição do estado. Para o caso geral temos

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu; & x(t_0) = x_0 \\ y = Cx \end{cases}$$

Derivando sucessivamente a saída mensurável  $y$  podemos montar a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ CB \\ CAB \\ \vdots \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ CB \\ \vdots \end{bmatrix} \dot{u} + \cdots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ CB \end{bmatrix} u^{(n-2)}$$

Supondo que  $y$ ,  $u$  e suas derivadas se encontram disponíveis para medida, podemos pensar em resolver a equação acima para recuperar  $x$ . Se a matriz

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

possuir posto completo, ou seja, se suas colunas forem linearmente independentes, será possível encontrar uma matriz  $V$  tal que

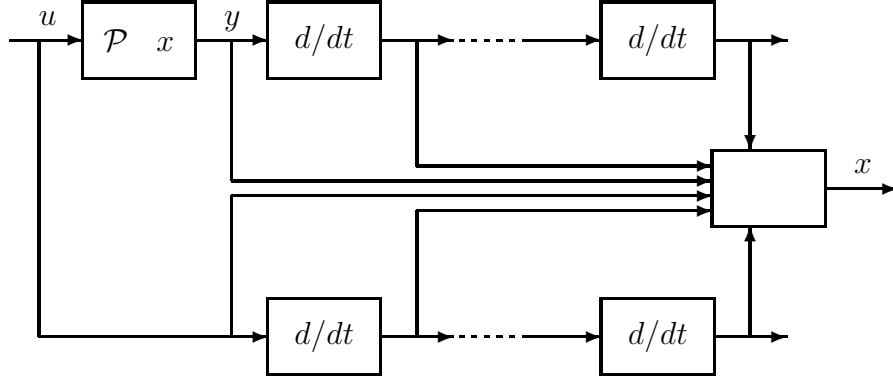
$$V \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = I_n$$

Deste modo pode-se expressar  $x$  a partir da equação acima:

$$x = V \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} - V \begin{bmatrix} 0 \\ CB \\ CAB \\ \vdots \end{bmatrix} u - V \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ CB \\ \vdots \end{bmatrix} \dot{u} - \cdots V \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ CB \end{bmatrix} u^{(n-2)}$$

Vemos assim que as variáveis de estado podem ser expressas como combinações lineares das variáveis de saída e suas derivadas, e das variáveis de entrada e suas derivadas. É interessante notar como o método esboçado acima está relacionado com a observabilidade do par  $\langle C, A \rangle$ . Os leitores são gentilmente convidados a estabelecer de maneira mais formal as

necessárias conexões. O diagrama de blocos a seguir explica o processo de recuperação do estado por meio de derivação de saídas e entradas:



A aplicabilidade de tal procedimento fica comprometida ao nos lembrarmos das dificuldades práticas associadas aos derivadores. Mesmo quando é possível contruir esses sistemas, eles apresentam sérios problemas de ampliação de ruídos. Apesar de todo o apelo que possa ter, por ser simples e direto, o método de derivação de saídas e entradas é inviável, pelas razões expostas. Seu interesse é apenas teórico.

### 2.2.2 Reconstruindo o modelo

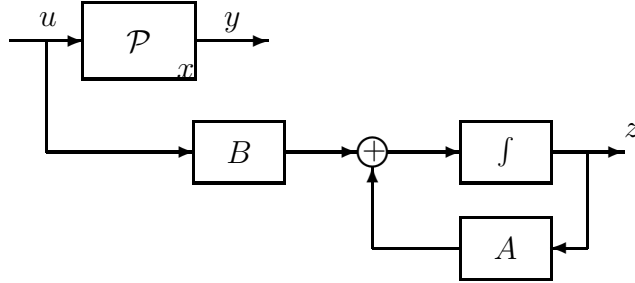
O estado  $x$  pode ser inacessível, mas é sempre possível construir em laboratório, ou simular em um computador, um sistema dinâmico com equações idênticas às da planta. Se esta cópia ou modelo da planta for excitada com a mesma entrada  $u$  e estiver sujeita às mesmas condições iniciais, então seu estado  $z$  será idêntico ao estado inacessível  $x$ . E com uma vantagem: ele está totalmente disponível, pois o modelo foi construído pelo projetista! Seja a planta  $\mathcal{P}$ , descrita pelas equações dinâmicas tradicionais:

$$\mathcal{P} \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu; & x(t_0) = x_0 \\ y = Cx \end{cases}$$

Não temos acesso a  $x$ , mas se a condição inicial  $x_0$  for conhecida, bem como as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$ , podemos realizar fisicamente um sistema  $\mathcal{M}$  com entrada  $u$  e estado  $z$  descrito por

$$\mathcal{M} \left\{ \begin{aligned} \dot{z} &= Az + Bu; & z(t_0) &= z_0 \end{aligned} \right.$$

Se ajustarmos o modelo com  $z_0 = x_0$  teremos  $z(t) = x(t) \forall t$ , e como  $z$  é plenamente disponível, resolvemos o problema. O diagrama abaixo mostra a situação:



A grande dificuldade desta técnica reside na necessidade de uma identificação perfeita, isto é, precisamos conhecer exatamente as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $x_0$ . Se o modelo for construído com componentes de alta precisão e se as suas condições iniciais forem rigorosamente iguais às da planta, então o funcionamento será satisfatório e  $z$  será uma reconstituição fiel de  $x$ . Para justificar estas afirmações, suponhamos que as matrizes usadas na construção do modelo são  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$ . Podemos definir a variável erro como  $e(t) = x(t) - z(t)$ ; o nosso modelo estará cumprindo sua missão quando  $e(t) = 0 \forall t$ . Das equações de definição acima temos

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{z} \\ &= Ax + Bu - \tilde{A}z - \tilde{B}u \\ &= Ax - \tilde{A}z + (B - \tilde{B})u \end{aligned}$$

Se  $A$  e  $B$  foram identificadas perfeitamente, e se o modelo foi implementado com componentes altamente precisos e acurados, teremos  $A = \tilde{A}$  e  $B = \tilde{B}$  e as equações acima se resumem a

$$\dot{e} = Ae$$

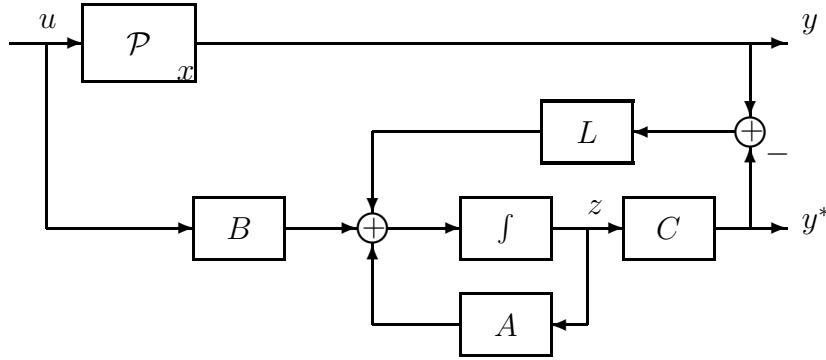
Se a identificação da condição inicial  $x_0$  da planta e o posterior ajuste de  $z_0$  também foram perfeitos, teremos  $e(t_0) = 0$  e  $e(t) = 0 \forall t$ , como se desejava. No entanto, se  $e(t_0) \neq 0$ , a expressão acima diz que o máximo que se pode conseguir é  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , e para isto é preciso autovalores de  $A$  no semiplano esquerdo aberto, ou seja, a planta deve ser inicialmente estável.

Quando há erros na identificação das matrizes, ou na sua implementação, nada garante que o comportamento da variável  $e$  será adequado, e assim  $z$  deixará de ter qualquer relação com  $x$ . Infelizmente a situação real é esta, pois os métodos disponíveis de identificação são imperfeitos. Além disto, mesmo se se conhecesse os parâmetros da planta com certeza absoluta, seria impossível construir na prática um modelo com parâmetros idênticos. Como encontrar componentes com a precisão suficiente para igualar estes valores?

Chegamos assim à triste conclusão que a reconstrução de modelo é também um método inviável para a recuperação de estado.

## 2.3 Técnicas de Substituição de Estado

O malogro dos métodos de Recuperação de Estados acima descritos sugere algo. No segundo deles, a saída  $y$  da planta não é utilizada. Poderíamos pensar em usar a idéia básica de realimentação para corrigir os inconvenientes encontrados: construiríamos uma saída  $y^* = Cz$  para o modelo, compararíamos esta saída com a saída real  $y$  da planta e realimentaríamos o resultado desta comparação para, de alguma maneira, obrigar o sinal  $y^*$  a rastrear  $y$ . Acontecendo isto espera-se que o estado  $z$  seja obrigado a rastrear  $x$  mais precisamente.



Na malha de realimentação colocaríamos um ganho  $L$  para poder alterar a velocidade de convergência. Se realmente conseguíssemos  $y^*$  e  $y$  sempre “próximas”, estaríamos fazendo com que  $z$  também se aproximasse de  $x$ . Estas idéias são muito atraentes, pois afinal uma das utilidades fundamentais da realimentação é exatamente resolver problemas como este. Mas elas seriam verdadeiras? O esquema proposto realmente funciona? A intuição diz que sim, mas é necessário analisá-lo com um pouco mais de detalhes. Supondo que usamos as matrizes exatas no modelo, ou seja,  $\tilde{A} = A, \tilde{B} = B, \tilde{C} = C$ , podemos usar o diagrama anterior para estabelecer as equações:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ \dot{z} &= Az + Bu + L(y - y^*) \\ &= Az + Bu + Ly - LCz \\ &= (A - LC)z + Bu + Ly\end{aligned}$$

Lembrando a definição do erro,  $e(t) = x(t) - z(t)$  podemos escrever

$$\begin{aligned}
\dot{e} &= Ax + Bu - (A - LC)z - Bu - Ly \\
&= Ax - (A - LC)z - LCx \\
&= (A - LC)e
\end{aligned}$$

Se os autovalores da matriz  $A - LC$  puderem ser colocados no semiplano esquerdo aberto do plano complexo então  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad \forall e_0$ . Isto significa que o estado  $z(t)$  do modelo tende assintoticamente para o estado inacessível  $x(t)$  da planta mesmo se o estado inicial do modelo for diferente do estado inicial da planta. Se estes estados forem idênticos, então  $e(t) = 0 \quad \forall t$  ou seja,  $x(t) = z(t) \quad \forall t$ . Vemos assim que o esquema apresentado pode funcionar para a finalidade desejada desde que os autovalores da matriz  $A - LC$  possam ser convenientemente escolhidos. Há um resultado clássico da teoria de sistemas lineares que trata exatamente desta situação:

**Teorema 2.3.1** *Os autovalores da matriz  $A - LC$  podem ser livremente designados através de escolha da matriz  $L$  se e somente se o par  $\langle C, A \rangle$  for observável.*

As perspectivas estão melhorando. Se houver observabilidade da planta conseguiremos construir um modelo cujo estado é um bom candidato para substituir o estado inacessível. Se as condições iniciais forem favoráveis (iguais) então a cópia será perfeita; no caso mais comum de haver desajustes iniciais, então o estado do modelo tende assintoticamente ao estado  $x(t)$ .

## 2.4 Resumo do Enredo e Perguntas

Desejamos implementar uma lei de controle por realimentação do estado de uma planta, mas é impossível medir todas as componentes deste vetor. As primeiras técnicas propostas para corrigir esta situação, as técnicas de recuperação de estado, mostraram-se inaplicáveis, de interesse apenas teórico. Em seguida, a intuição sugeriu um procedimento, aparentemente razoável, de se encontrar um substituto para o estado. Uma base teórica sólida garante a possibilidade de funcionamento deste esquema; os passos necessários para implementá-lo seriam:

- Verificar a observabilidade do planta
- Encontrar  $L$  tal que os autovalores de  $A - LC$  sejam “estáveis”



- construir um modelo de acordo com o diagrama anterior

Este procedimento se baseia em anexar à planta um outro sistema dinâmico, chamado até agora de “modelo” ou “cópia”, cujo estado — mensurável, por construção — promete ser um substituto para o estado perdido, algo que tende assintoticamente a ele. Neste ponto, muitas perguntas importantes aparecem.

Quem nos garante que a lei de controle  $u = Fz$ , com o estado substituto, terá o mesmo efeito que a lei original  $u = Fx$  ?

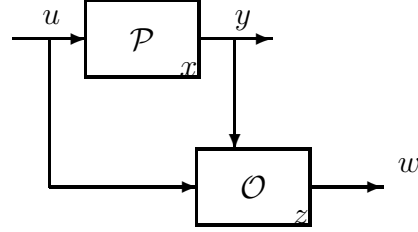
O modelo  $\mathcal{M}$  continuará fornecendo uma boa cópia para  $x$  mesmo quando seus parâmetros  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  forem diferentes dos parâmetros originais da planta?

Podemos encontrar outros sistemas dinâmicos capazes de fornecer substitutos para o estado da planta? Se sim, qual seria a dimensão mínima destes sistemas?

Nas próximas seções responderemos estas e outras questões relacionadas a esses sistemas geradores de estados substitutos. Em primeiro lugar, um batizado. Tais sistemas recebem o nome de Estimadores Assintóticos de Estado, ou então Observadores Assintóticos ou simplesmente Observadores, e foram introduzidos na literatura por Luenberger. Após estudar os observadores dirigiremos a atenção para as técnicas de Transformação do Problema. Procuraremos transformar o problema de realimentar um estado intocável em um problema de realimentar saídas mensuráveis. Será a vez dos chamados Compensadores Dinâmicos, pesquisados inicialmente por Pearson. Em qualquer dos casos teremos um aumento da ordem do sistema, isto é, torna-se necessária a introdução de um novo sistema dinâmico, com novos modos e autovalores, para que possamos contornar as dificuldades de um estado não mensurável. No primeiro caso, dos observadores, os modos adicionados são inobserváveis, ocorrendo o oposto no segundo caso. Mas isto são coisas futuras, e no tempo certo nos dedicaremos a elas, com a energia e a concentração necessárias. Uma tarefa por vez, e agora a vez é da:

## 2.5 Teoria dos Observadores

**Observador** ou **Estimador Assintótico de Estados** é um sistema dinâmico capaz de reproduzir, substituir os estados não mensuráveis de uma planta  $\mathcal{P}$  com o conhecimento de suas entradas e saídas:



A tarefa do projetista se resume a criar um sistema dinâmico  $\mathcal{O}$  acionado pela entrada  $u$  e pela saída  $y$  da planta  $\mathcal{P}$  e cuja saída  $w$  seja um bom substituto para o estado  $x$  da planta, inacessível. Dizer que  $w$  é um bom substituto para  $x$  significa dizer que  $w$  tende assintoticamente para  $x$  ao longo do tempo:

$$w(t) \rightarrow x(t) \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty$$

ou então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (w(t) - x(t)) = 0$$

Sendo a planta um sistema linear e invariante no tempo, é razoável supor que seu estado possa ser observado por estimadores também lineares e invariantes no tempo. Esta será uma hipótese de trabalho sempre presente. Com ela, o objetivo principal do estudo pode ser resumido na seguinte

**Meta:**

Dada uma planta  $\mathcal{P}$  caracterizada pelas matrizes  $A, B, C$  e pela condição inicial  $x_0$ , encontrar um sistema dinâmico acionado por suas entradas e saídas, com condição inicial  $z_0$  e cuja saída  $w$  tenda assintoticamente para o estado inacessível  $x$  de  $\mathcal{P}$  quaisquer que sejam as condições iniciais:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (w(t) - x(t)) = 0 \quad \forall x_0, \forall z_0$$

Um sistema dinâmico capaz disso recebe o nome de Estimador Assintótico de Estados, ou Observador Assintótico ou simplesmente observador e será indicado pelo símbolo  $\mathcal{O}$ . Para simplificar a notação podemos chamar  $w(t) - x(t)$  de **erro de estimação**,  $\varepsilon(t)$ :

$$\varepsilon(t) = w(t) - x(t) \tag{2.1}$$

As equações dinâmicas abaixo descrevem a planta e um candidato a observador:

$$\mathcal{P} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \mathcal{S} \begin{cases} \dot{z}(t) = Gz(t) + Hu(t) + Jy(t) \\ w(t) = Mz(t) + Ny(t) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

Supomos que a planta é um sistema com dimensão  $n$ , ou seja,  $x(t)$  pertence ao espaço de estados  $\mathcal{X}$  com  $\dim \mathcal{X} = n$ . Analogamente diríamos que  $u(t) \in \mathcal{U}$ , com  $\dim \mathcal{U} = m$  e  $y(t) \in \mathcal{Y}$ , com  $\dim \mathcal{Y} = r$ . Com isto as matrizes  $A, B$  e  $C$  tem dimensões, respectivamente,  $(n \times n), (n \times m)$  e  $(r \times n)$ . Supomos também que o candidato a observador tem dimensão  $o$ , ou seja, seu estado  $z(t)$  pertence ao espaço  $\mathcal{Z}$  com  $\dim \mathcal{Z} = o$ . A saída  $w$  deve ter a mesma dimensão de  $x$ , logo  $w(t) \in \mathcal{W} = \mathcal{X}$  e  $\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{X} = n$ . Assim os tamanhos das matrizes  $G, H, J, M$  e  $N$  são, respectivamente:  $(o \times o), (o \times m), (o \times r), (n \times o)$  e  $(n \times r)$ .

Um modelo mais geral para o candidato  $\mathcal{S}$  relacionaria  $w(t)$  com a entrada  $u(t)$  da planta, por meio de um termo do tipo  $N'u(t)$  na equação de  $w(t)$ . As análises posteriores mostrarão que podemos prescindir de tal acoplamento direto; a estrutura mostrada acima já é suficientemente ampla para permitir o desenvolvimento.

A meta pode agora ser enunciada de maneira mais precisa: conhecida uma planta como acima, projetar um sistema dinâmico  $\mathcal{S}$ , caracterizado pelas matrizes  $\langle G, H, J, M, N \rangle$ , de modo a conduzir o erro de estimação  $\varepsilon(t)$  assintoticamente à origem. Esta convergência deve se verificar para quaisquer condições iniciais da planta e do observador. Apresentamos a seguir o resultado mais importante no estudo dos observadores, a base teórica de todos os próximos passos. O símbolo  $\lambda(X)$  denota o espectro da matriz  $X$ , o conjunto de todos seus autovalores; o plano complexo é representado por  $\mathbb{C}$  e o seu semiplano esquerdo aberto, a região estável, por  $\mathbb{C}^-$ .

### **Teorema 2.5.1 — Teorema Fundamental dos Observadores**

*O sistema dinâmico  $\mathcal{S} = \langle G, H, J, M, N \rangle$  é um observador assintótico para a planta  $\mathcal{P} = \langle A, B, C \rangle$  se e somente se existir uma matriz  $T(o \times n)$ , com  $o \leq n$ , tal que:*

$$TA - GT = JC \quad (2.2)$$

$$TB = H \quad (2.3)$$

$$MT + NC = I_n \quad (2.4)$$

$$\lambda(G) \subset \mathbb{C}^- \quad (2.5)$$

Este teorema mostra que o problema de se projetar um Estimador Assintótico de Estados recai em um problema de Álgebra Matricial: solucionar

as equações (2.2), (2.3) e (2.4). A equação (2.5) apresenta uma restrição de natureza diferente, pois é independente de  $T$  e diz que  $G$  deve ser escolhida de modo a ter seus autovalores em  $\mathbb{C}^-$ , ou seja, qualquer observador deve ser estável. Note-se também que o caso  $o > n$  ficará de fora porque, como se verá a seguir, as condições para existência de soluções quando  $o \leq n$  já são suaves. E do ponto de vista prático é certamente melhor usar estimadores com ordens menores. A demonstração do teorema acima será dividida em partes.

**A condição é necessária:** Supomos que  $\mathcal{S} = \langle G, H, J, M, N \rangle$  estima o estado da planta. Isto significa que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$ . Lembrando a definição de  $\varepsilon$ , na equação 2.1,

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= w(t) - x(t) \\ &= Mz(t) + NCx(t) - x(t) \\ &= Mz(t) + (NC - I)x(t)\end{aligned}$$

deduzimos que

$$Mz(t) = (I - NC)x(t) + \varepsilon(t) \quad (2.6)$$

Estamos considerando a dimensão do observador menor ou igual à da planta:  $o \leq n$ . Isto significa que a matriz  $M(n \times o)$  terá mais linhas que colunas, e poderá ser escolhida com posto completo, ou seja,  $\rho(M) = o$ , o que permite encontrar uma pseudoinversa  $M^+(o \times n)$  tal que  $M^+M = I_o$ . Usando isto em (2.6) conseguiremos uma expressão para  $z(t)$ :

$$z(t) = M^+(I - NC)x(t) + M^+\varepsilon(t) \quad (2.7)$$

Colocando  $M^+(I - NC) = T$  e  $M^+\varepsilon(t) = e(t)$  chegamos a

$$z(t) = Tx(t) + e(t) \quad (2.8)$$

Esta expressão (2.8) diz que o estado  $z$  dos observadores deve necessariamente ser uma transformação linear do estado  $x$  da planta acrescida de um certo erro  $e$ . Derivando (2.8) e usando as equações básicas de  $\mathcal{S}$ :

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= T\dot{x}(t) + \dot{e}(t) \\ &= TAx(t) + TBu(t) + \dot{e}(t) \\ &= Gz(t) + Hu(t) + Jy(t)\end{aligned}$$

Lembrando que  $y(t) = Cx(t)$  podemos igualar as diferentes expressões para  $\dot{z}(t)$  acima:

$$\begin{aligned}TAx(t) + TBu(t) + \dot{e}(t) &= Gz(t) + Hu(t) + JCx(t) \\ TAx(t) + \dot{e}(t) &= G(Tx(t) + e(t)) + (H - TB)u(t) + JCx(t)\end{aligned}$$

donde tiramos, após alguns agrupamentos:

$$(GT + JC - TA)x(t) + (H - TB)u(t) - (\dot{e}(t) - Ge(t)) = 0$$

A expressão acima deve se anular independentemente das funções  $x(\cdot)$ ,  $u(\cdot)$ ,  $e(\cdot)$  envolvidas. Para isto é necessário que

$$\begin{aligned} GT + JC - TA &= 0 \\ H - TB &= 0 \\ \dot{e}(t) - Ge(t) &= 0 \end{aligned}$$

A primeira das equações acima se transforma trivialmente em

$$TA - GT = JC$$

que é a restrição (2.2) do teorema. A segunda equação fica

$$TB = H$$

e temos (2.3). A última expressão leva a

$$\dot{e}(t) = Ge(t)$$

Mas  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  pois  $e(t) = M^+ \varepsilon(t)$ , e estamos supondo que a estimação funciona, ou seja,  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ . Como isto deve valer para quaisquer condições iniciais, somos levados a concluir que o sinal de erro  $e(t)$  tem um comportamento estável, o que é equivalente a

$$\lambda(G) \subset \mathbb{C}^-$$

Esta é a equação (2.5). Para estabelecer a validade de (2.4) devemos lembrar que  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ , logo  $\lim_{t \rightarrow \infty} (w(t) - x(t)) = 0$ , donde

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (Mz(t) + Ny(t) - x(t)) &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} [M(Tx(t) + e(t)) + NCx(t) - x(t)] &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} [(MT + NC - I)x(t) + Me(t)] &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} [(MT + NC - I)x(t)] + \lim_{t \rightarrow \infty} Me(t) &= 0 \end{aligned}$$

O sinal  $e(t)$  tende a zero, logo o seu limite na expressão acima é nulo; como esta expressão deve ser verdadeira para qualquer  $x(t)$ , concluímos que

$$MT + NC = I$$

e esta é exatamente a equação (2.4), o que completa a demonstração da necessidade do teorema.

**A condição é suficiente:** Considere as matrizes  $G, H, J, M$  e  $N$  escolhidas de modo a satisfazer as equações (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5). Podemos com elas construir um sistema dinâmico  $\mathcal{S}$  descrito pelas equações:

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{z}(t) = Gz(t) + Hu(t) + Jy(t) \\ w(t) = Mz(t) + Ny(t) \end{cases}$$

Mostraremos que este sistema funciona como um Estimador Assintótico de Estados, ou seja, que  $w(t)$  tende assintoticamente para  $x(t)$ . Para isto, estudemos o sinal

$$\begin{aligned} w(t) - x(t) &= Mz(t) + Ny(t) - x(t) \\ &= Mz(t) + (NC - I)x(t) \\ &= Mz(t) - MTx(t) \\ &= M(z(t) - Tx(t)) \end{aligned}$$

Note-se que a expressão (2.4) foi usada. Se mostrarmos que o sinal  $z(t) - Tx(t)$  tende à origem, teremos mostrado que  $w(t)$  é uma estimativa assintótica de  $x(t)$  e, conseqüentemente,  $\mathcal{S}$  funciona como observador para planta. Seja  $e(t) = z(t) - Tx(t)$ ; derivando este sinal temos:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{z}(t) - T\dot{x}(t) \\ &= Gz(t) + Hu(t) + Jy(t) - T(Ax(t) + Bu(t)) \\ &= G(Tx(t) + e(t)) + Hu(t) + JCx(t) - TAx(t) - TBu(t) \\ &= (GT + JC - TA)x(t) + (H - TB)u(t) + Ge(t) \end{aligned}$$

Usando (2.2) e (2.3) deduzimos que

$$\dot{e}(t) = Ge(t)$$

Finalmente, a partir de (2.5) concluímos que o erro acima tem um comportamento estável, e  $\mathcal{S}$  realmente estima. ■

A base teórica necessária para o estudo dos observadores está contida no resultado acima. No restante deste capítulo trataremos de aspectos gerais associados e apresentaremos exemplos ilustrativos. Antes, porém ...

## 2.6 Resumo do enredo

Por obra e graça do teorema da seção anterior, o problema prático de projetar um sistema dinâmico capaz de gerar um substituto para o estado inacessível de uma dada planta se transformou no seguinte problema matemático:

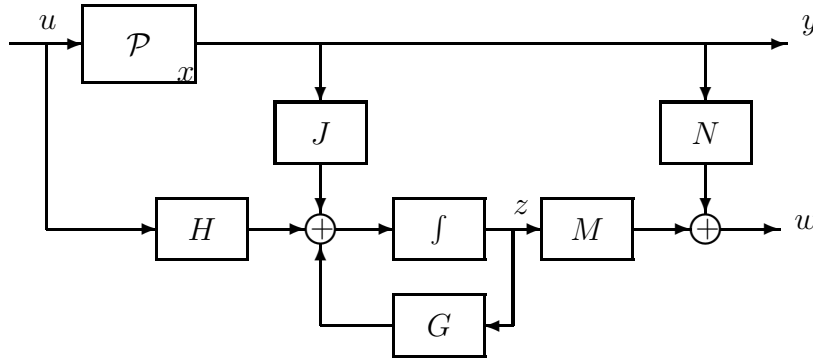
Dadas as matrizes reais  $A(n \times n)$ ,  $B(n \times m)$ ,  $C(r \times n)$  encontrar, se possível, matrizes reais

$$\begin{aligned} T(o \times n), \quad G(o \times o), \quad H(o \times m), \\ J(o \times r), \quad M(n \times o), \quad N(n \times r) \end{aligned}$$

com  $o \leq n$  tais que as expressões abaixo, chamadas de *Relações Fundamentais dos Observadores*, ou, mais resumidamente, *RFO*, se verifiquem:

$$\begin{aligned} TA - GT &= JC \\ TB &= H \\ MT + NC &= I_n \\ \lambda(G) &\in \mathbb{C}^- \end{aligned}$$

Tendo em mãos uma solução das RFO o projeto se encerraria com a efetiva implementação do estimador. Para isto construiríamos um sistema dinâmico de acordo com o diagrama abaixo:



A postura sensata a se tomar diante de um problema matemático qualquer se resume a duas etapas:

1. Saber se existe solução
2. Em caso positivo, encontrar uma delas, ou mais de uma, ou então delimitar a família de todas as possíveis soluções.

A primeira vista estas tarefas podem parecer formidáveis para a situação acima discutida de se projetar observadores para uma dada planta. Será mais fácil do que parece, felizmente. Os próximos capítulos tratarão com mais detalhes destes aspectos matemáticos de existência de soluções e de uma busca ordenada delas. Antes disso, a hora é de exemplos e dos outros temas gerais prometidos.

**Exemplo 2.6.1** *Seja a planta  $\mathcal{P}$  modelada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0]$$

*Um possível caminho para resolver as RFO consiste em fixar uma das matrizes procuradas e verificar se é possível encontrar as demais. Às vezes é vantajoso escolher inicialmente a matriz  $G$ , característica da dinâmica do observador. Seja então, por exemplo,*

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

*Com esta escolha a equação (2.5) já foi satisfeita. Tomando agora  $T$  e  $J$  totalmente literais, (2.2) fica*

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} [1 \quad 0]$$

*que pode ser desenvolvida até*

$$\begin{bmatrix} t_{11} - 2t_{12} & t_{11} - t_{12} \\ t_{21} - 2t_{22} & t_{21} - t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 & 0 \\ j_2 & 0 \end{bmatrix}$$

*Esta expressão fornece as seguintes restrições:*

$$\begin{cases} t_{12} = t_{11} \\ t_{22} = t_{21} \end{cases} \quad \begin{cases} j_1 = t_{11} - 2t_{12} = -t_{11} \\ j_2 = t_{21} - 2t_{22} = -t_{21} \end{cases}$$

*Com isto teremos*

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{11} \\ t_{21} & t_{21} \end{bmatrix}; \quad J = \begin{bmatrix} -t_{11} \\ -t_{21} \end{bmatrix}; \quad H = TB = \begin{bmatrix} -2t_{11} \\ -2t_{21} \end{bmatrix}$$

*Sejam agora  $M$  e  $N$  literais. A equação (2.4) exige que*

$$MT = I_2 - NC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} [1 \quad 0]$$

*donde*

$$MT = \begin{bmatrix} 1 - n_1 & 0 \\ -n_2 & 1 \end{bmatrix}$$

*Como as colunas de  $T$  são idênticas, as de  $MT$  também devem ser, logo  $1 - n_1 = 0$  e  $n_2 = -1$ , o que leva a*

$$N = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



O produto de  $M$  pela segunda coluna de  $T$  deve ser igual à segunda coluna de  $I - NC$ :

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esta equação admite muitas soluções. Supondo, por exemplo,  $t_{11} = t_{21} = 1$  encontraríamos as restrições  $m_{11} + m_{12} = 0$  e  $m_{21} + m_{22} = 1$  acarretando

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & -m_{11} \\ m_{21} & 1 - m_{21} \end{bmatrix}$$

A solução encontrada para as RFO seria constituída pelas matrizes:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad J = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & -m_{11} \\ m_{21} & 1 - m_{21} \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e o estimador assintótico de estados seria implementado pelo diagrama visto anteriormente.

Vários aspectos precisam ser discutidos. Em primeiro lugar, o método utilizado para se encontrar soluções para as RFO é trabalhoso, cheio de artifícios e pouco prático; nos próximos capítulos apresentaremos maneiras elegantes e sistematizadas para resolver tal problema. Outro aspecto. Que aconteceria se fosse escolhida uma matriz  $G$  diferente no princípio? Os desenvolvimentos efetuados sugerem que o método continuaria funcionando e chegaríamos a um outro conjunto de soluções para as RFO. Mas e o observador resultante, que aconteceria com ele? De que maneira a escolha de  $G$  afeta o desempenho final?

Mais um tópico. Voltando ao exemplo, verificamos que há muita liberdade na escolha dos parâmetros  $t_{11}$  e  $t_{12}$ . A seleção feita,  $t_{11} = t_{12} = 1$ , foi aleatória. Que aconteceria para outras escolhas? Sejam, por exemplo,  $t_{11} = 1$  e  $t_{12} = 0$ . Isto ocasionaria

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad J = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & m_{12} \\ 1 & m_{22} \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e o estimador seria representado por

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} y(t)$$

Como  $G$  é diagonal, verifica-se que a segunda componente do vetor  $z$  é incontrolável: os sinais  $u$  e  $y$  são incapazes de afetá-la. Isto leva a crer que nada se perderia no comportamento dinâmico do estimador se desprezássemos esta parte e considerássemos apenas a equação dinâmica reduzida

$$\dot{z}_r(t) = -z_r(t) - 2u(t) - y(t)$$

Um sistema construído de acordo com esta equação continuaria estimando o estado  $x$  da planta? Os leitores são gentilmente instigados a pensar no assunto. Ainda outro aspecto. A resolução das RFO fornece as matrizes que devem ser usadas na prática. Que acontece se não conseguimos obter componentes reais suficientemente acurados para implementar com exatidão os valores de projeto? Estes assuntos palpitantes, entre outros, serão tratados nas próximas seções.

## 2.7 Escolhendo a Rapidez

Conforme vimos na demonstração do teorema 2.5.1, se um observador foi projetado para uma determinada planta, então o sinal definido por  $e(t) = z(t) - Tx(t)$  satisfaz a equação diferencial  $\dot{e}(t) = Ge(t)$ , donde

$$e(t) = e^{tG}(e_0)$$

Este sinal  $e(t)$  será chamado de **erro de operação**; para evitar confusões, é conveniente lembrar a definição do erro de estimação:  $\varepsilon(t) = w(t) - x(t)$ . O estado do observador é dado por

$$z(t) = Tx(t) + e^{tG}(z_0 - Tx_0)$$

Acertando a condição inicial do observador por meio de  $z_0 = Tx_0$  haverá uma dependência linear exata entre os estados do observador e da planta:  $z(t) = Tx(t) \forall t$ , e o erro de operação será identicamente nulo:  $e(t) = 0 \forall t$ . O erro de estimação também se anula, ou seja, a estimação será perfeita:  $w(t) = x(t) \forall t$ .

Em um caso mais real, onde é impossível ajustar a condição inicial do observador com tanta exatidão, poderemos ter  $e(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , ou

equivalentemente,  $z(t) \rightarrow Tx(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$ , ou ainda  $w(t) \rightarrow x(t)$ , bastando para isso uma escolha adequada do espectro de  $G$ . Os autovalores desta matriz precisam, obviamente, estar em  $\mathbb{C}^-$ ; quanto mais à esquerda forem colocados, mais rápidas serão as convergências. A matriz  $G$  deve satisfazer a equação (2.2) das RFO; se após essa restrição ainda for possível escolher arbitrariamente os seus autovalores, então poderemos tornar a convergência do observador arbitrariamente rápida.

**Exemplo 2.7.1** Consideremos novamente a planta  $\mathcal{P}$  estudada no exemplo 2.6.1:

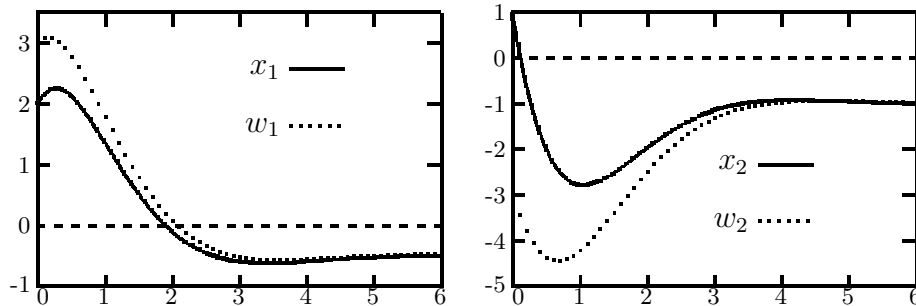
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} u(t); \quad y(t) = [1 \ 0] x(t)$$

O estimador projetado obedecia às seguintes equações:

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} y(t)$$

$$w(t) = \begin{bmatrix} m_{11} & -m_{11} \\ m_{21} & 1 - m_{21} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} y(t)$$

O desempenho deste observador é caracterizado por autovalores em  $-1$ . Supondo que a entrada é um degrau unitário  $u(t) = 1(t)$ , que as condições iniciais  $x_0$  e  $z_0$  são nulas, e que escolhemos  $m_{11} = m_{21} = 1$ , verificaríamos por simulação — ou através de alguns cálculos simples — que o estimador tem um funcionamento perfeito:  $w(t) - x(t) = 0 \quad \forall t$ . Isto era de se esperar, dadas as condições iniciais favoráveis. O caráter assintótico da estimação aparece apenas quando  $Tx_0 \neq z_0$ . Sejam então  $z_0 = [-1 \ -2]^T$  e  $x_0 = [2 \ 1]^T$ . Os gráficos abaixo ilustram o comportamento das variáveis de estado “reais”,  $x_1$  e  $x_2$  e o das variáveis estimadas  $w_1$  e  $w_2$ .



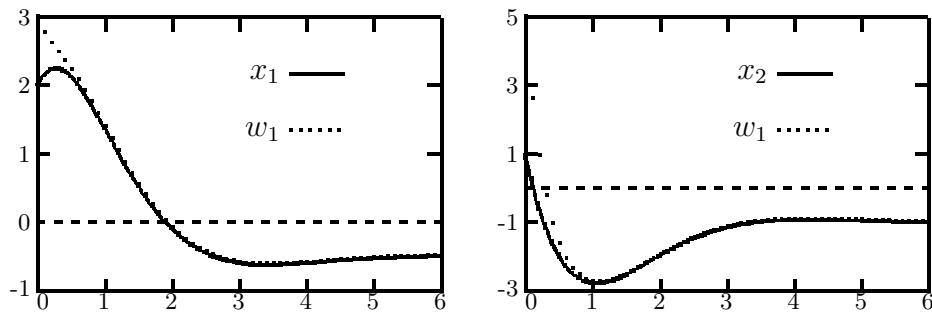
Variáveis de Estado e Saídas do Estimador com Pólos em  $-1$

As variáveis estimadas realmente tendem para as reais, de acordo com a previsão teórica. Que aconteceria se o observador projetado fosse mais “rápido”? Refazendo os cálculos do exemplo anterior para  $G$  com autovalores em  $-5$  encontraríamos, conforme os leitores diligentes certamente verificarão:

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -17 \\ -17 \end{bmatrix} y(t)$$

$$w(t) = \begin{bmatrix} m_{11} & -m_{11} \\ m_{21} & 1 - m_{21} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} y(t)$$

Considerando novamente a mesma entrada em degrau unitário, os mesmos valores para os  $m_{ij}$  e as mesmas condições iniciais não nulas, uma simulação mostraria o desempenho resultante. A análise das curvas abaixo e sua comparação com as do estimador lento anterior é muito instrutiva.



Variáveis de Estado e Saídas do Estimador com Pólos em  $-5$

Estes exemplos permitem visualizar os fatos indicados pela teoria: o desempenho da estimação depende da dinâmica da matriz  $G$ . Supondo que o espectro do observador possa ser livremente escolhido, a tendência natural seria a de empurrar os autovalores para a esquerda o máximo possível, garantindo assim uma convergência muito rápida. Este procedimento pode acarretar problemas práticos associados a ganhos elevados, tais como saturação de componentes, picos indesejados nos transitórios, amplificação de ruídos, etc. As técnicas do Controle Ótimo Linear Quadrático podem ser aplicadas a este problema de escolha dos autovalores de  $G$ , como veremos oportunamente.

## 2.8 Diminuindo a Ordem

Dada a planta  $\mathcal{P} = \langle A, B, C \rangle$  cada conjunto  $\langle T, G, H, J, M, N \rangle$ , onde as matrizes foram escolhidas convenientemente, corresponde a um particular

observador assintótico. A idéia de simplicidade é sempre atraente. Qual seria a mínima ordem possível para os observadores de uma dada planta? Em outras palavras, qual o mínimo valor possível para o inteiro  $o$  capaz de satisfazer as RFO? O teorema 2.5.1 pode ser empregado para responder esta questão:

**Corolário 2.8.1** *A ordem mínima necessária para um observador estimar o estado de uma planta é  $n - r$ , onde  $r$  representa o número de variáveis de saída da planta.*

**Demonstração:** Podemos reescrever (2.4) como

$$\begin{bmatrix} M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} = I_n$$

Um resultado clássico da álgebra matricial diz que o posto de um produto de matrizes é sempre menor ou igual ao posto dos fatores: se  $X = WZ$  então  $\rho(X) \leq \min\{\rho(W), \rho(Z)\}$ , donde concluímos que  $\rho[M \ N] \geq \rho(I_n) = n$ . Mas esta matriz tem  $o + r$  colunas e assim

$$o + r \geq \rho[M \ N] \geq n$$

o que conduz a  $o \geq n - r$  ■

As variáveis de saída (mensuráveis por definição) são combinações lineares das variáveis de estado. Há  $r$  delas. Deste modo, é razoável supor que  $r$  das variáveis de estado não precisam ser estimadas pois podem ser obtidas diretamente das medidas de  $y$ . Restariam  $n - r$  componentes de  $x$ , e para estas seria construído o observador. Maiores detalhes virão no próximo capítulo.

**Exemplo 2.8.1** *Seja novamente a planta cujas equações dinâmicas são caracterizadas pelas matrizes:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

*Um estimador assintótico de ordem  $o = n = 2$  foi projetado para tal planta no exemplo (2.6.1). Sabendo agora que a ordem dos observadores mínimos para este caso é  $o = n - r = 1$ , a mesma sistemática usada então para resolver as RFO pode ser tentada. Para isso fixa-se inicialmente a dinâmica do estimador, escolhendo, por coerência,  $G = -1$ . Tomando  $T$  e  $J$  literais, (2.2) fica*

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \end{bmatrix} = (j_1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

que pode ser desenvolvida até

$$\begin{bmatrix} t_{11} - 2t_{12} & t_{11} - t_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta expressão fornece as restrições:  $t_{12} = t_{11}$  e  $j_1 = t_{11} - 2t_{12} = -t_{11}$ . Com isto teremos  $T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{11} \end{bmatrix}$ ,  $J = -t_{11}$  e  $H = TB = -2t_{11}$ . Sejam  $M$  e  $N$  literais. A equação (2.3) exige que

$$MT = I_2 - NC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$MT = \begin{bmatrix} 1 - n_1 & 0 \\ -n_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Como as colunas de  $T$  são idênticas, as de  $MT$  também devem ser, logo  $1 - n_1 = 0$  e  $n_2 = -1$ , o que leva a

$$N = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

exatamente como no caso do exemplo (2.6.1). O produto de  $M$  pela segunda coluna de  $T$  deve ser igual à segunda coluna de  $I - NC$ :

$$\begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix} (t_{11}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esta equação fornece duas restrições:  $m_{11}t_{11} = 0$  e  $m_{21}t_{11} = 1$ . A partir da primeira verifica-se que  $m_{11} = 0$  pois senão  $T$  se anularia; a segunda admite muitas soluções. Supondo, por exemplo,  $t_{11} = 1$  encontraríamos  $m_{21} = 1$ ; a matriz  $M$  seria dada por

$$M = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A solução encontrada para as RFO seria constituída pelas matrizes:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad G = -1; \quad H = -2; \quad J = -1$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

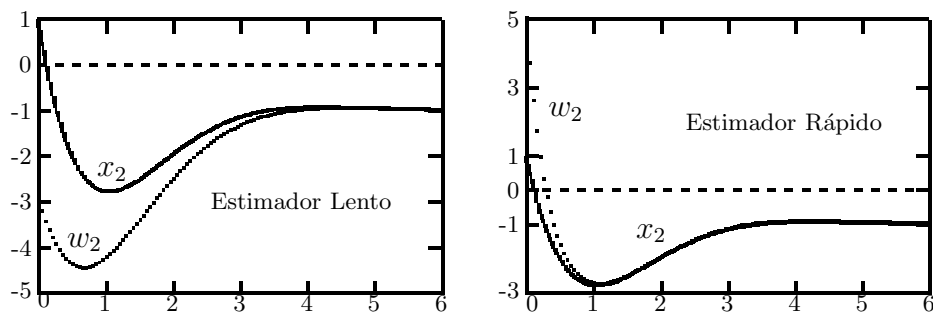
e o estimador assintótico de estados seria implementado por

$$\dot{z}(t) = -z(t) - 2u(t) - y(t); \quad w(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} y(t)$$

A equação para  $w$  mostra que sua primeira componente  $w_1$  é idêntica à saída  $y$ ; o fato de o estimador ter ordem mínima é uma consequência deste fato, de não ser necessário “gastar uma ordem” para estimar um sinal mensurável. É interessante comparar estes resultados com os comentários feitos após o exemplo (2.6.1). O cálculo de um observador mínimo com pólos em  $-5$  seria feito trivialmente, resultando em

$$\dot{z}(t) = -5z(t) - 6u(t) - 17y(t); \quad w(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} y(t)$$

Considerando a mesma entrada em degrau unitário e as mesmas condições iniciais do exemplo (2.6.1), uma simulação mostraria o desempenho resultante. Como a primeira variável de estado,  $x_1$ , é obtida trivialmente, apenas  $x_2$  e sua estimativa  $w_2$  serão mostradas. O primeiro gráfico ilustra o estimador “lento” com autovalores em  $-1$ ; o segundo mostra o comportamento “rápido”.

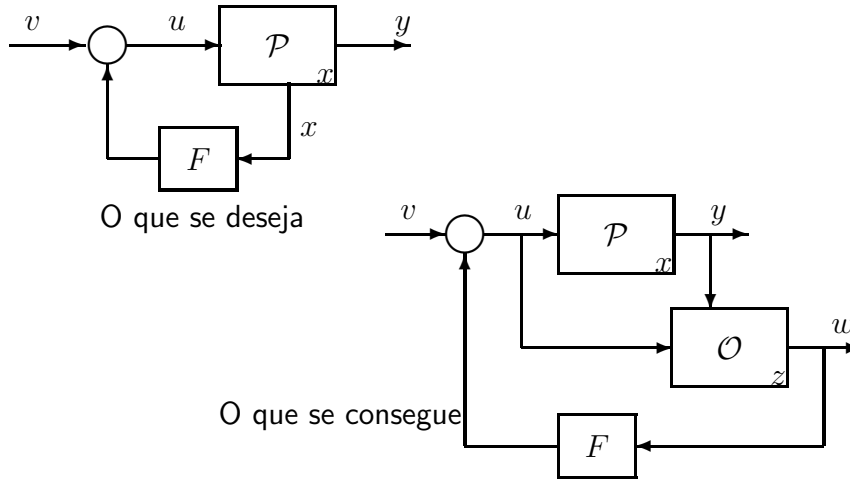


Estimador Mínimo — Autovalores em  $-1$  e  $-5$

## 2.9 Separação de Estados

Os esforços no sentido de buscar um bom substituto para estados inacessíveis conduziram a esquemas interessantes e promissores. É teoricamente possível construir sistemas dinâmicos cujas saídas **estimam** estados que não se consegue medir. Esses sistemas devem ser acoplados à planta, e em situações especiais a substituição será perfeita; em caso contrário a saída do observador **tende assintoticamente** ao estado procurado.

Os problemas de Controle normalmente requerem realimentações de estado, ou seja, devemos usar uma lei de controle do tipo  $u = Fx + v$  onde  $x$  é o estado da planta. Ora, o máximo que se consegue na prática é implementar a lei  $u = Fw + v$  onde  $w$  é a saída mensurável de um observador. Quando as condições iniciais forem adequadas ( $z(0) = Tx(0)$ ), teremos  $w(t) = x(t) \forall t$  e os resultados conseguidos são exatamente os que a teoria prevê. Haverá, lógico, o trabalho adicional de se construir um sistema dinâmico extra e adicioná-lo à malha de controle. Mas estas são hipóteses um tanto quanto utópicas. As hipóteses de trabalho razoáveis devem obrigatoriamente levar em conta que as condições iniciais podem não ser tão camaradas. Isto quer dizer que  $w(t)$  “apenas” tende assintoticamente para  $x(t)$ . Nestas circunstâncias, qual será o efeito da lei de controle  $u = Fw + v$ ? É lícito usá-la para substituir a lei original, que usa o estado real?



Estes diagramas ilustram essas duas situações: gostaríamos de usar o esquema descrito no primeiro deles, mas apenas o sistema do segundo diagrama pode ser construído na prática. Novos elementos dinâmicos estão sendo introduzidos na malha de controle. Qual será seu efeito? O comportamento dos sinais  $x(t)$  e  $y(t)$  será semelhante ao que teriam se não houvesse esse novo sistema na malha? Pela teoria vista até agora, nada garante isso; sabe-se apenas que  $w(t) \rightarrow x(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Seja a planta  $\mathcal{P}$  e um seu observador  $\mathcal{O}$ :

$$\mathcal{P} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \mathcal{O} \begin{cases} \dot{z}(t) = Gz(t) + Hu(t) + Jy(t) \\ w(t) = Mz(t) + Ny(t) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$



O sistema global constituído por  $\mathcal{P}$  e por  $\mathcal{O}$  pode ser descrito pelas seguintes equações dinâmicas:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ JC & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ H \end{bmatrix} u$$

$$y = [C \ 0] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}; \quad w = [NC \ M] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

Realimentar o estado estimado significa usar a lei

$$\begin{aligned} u &= Fw + v \\ &= F(Mz + NCx) + v \\ &= FNCx + FMz + v \end{aligned}$$

A equação dinâmica da malha fechada fica:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BFNC & BFM \\ JC + HFNC & G + HFM \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ H \end{bmatrix} v$$

Para melhor apreciar as propriedades desta equação, seja a mudança de bases dada por

$$p = Q\tilde{p} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ T & I_o \end{bmatrix} \tilde{p}$$

onde por  $p$  entendemos o estado expandido composto por  $x$  e por  $z$ . Na nova base esse estado seria representado por

$$\tilde{p} = Q^{-1}p = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ z - Tx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

A malha fechada passaria a ser descrita por

$$\dot{\tilde{p}} = Q^{-1} \begin{bmatrix} A + BFNC & BFM \\ JC + HFNC & G + HFM \end{bmatrix} Q\tilde{p} + Q^{-1} \begin{bmatrix} B \\ H \end{bmatrix} v$$

Aproveitando as propriedades estruturais da matriz  $Q$  escolhida, o desenvolvimento dos produtos acima levaria a

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BF & BFM \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (2.9)$$

$$y = [C \ 0] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}; \quad w = [I \ M] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

As propriedades dinâmicas do sistema expandido planta + observador + lei  $u = Fw$  são realçadas nesta nova base. Com efeito, uma simples inspeção das matrizes acima permite verificar que o espectro da malha fechada é a união do espectro desejado com o espectro do observador:

$$\lambda(A_e) = \lambda(A + BF) \cup \lambda(G)$$

Esta relação é importante. A lei de controle que se deseja implementar,  $u = Fx + v$ , interagiria com a dinâmica da planta fazendo com que o comportamento da malha fechada fosse descrito pelos autovalores da matriz  $A + BF$ . A lei de controle que efetivamente se consegue construir,  $u = Fw + v$ , também é capaz de impor à malha fechada os autovalores de  $A + BF$ . Há, entretanto, um preço a se pagar: além destas características dinâmicas, que eram desejadas, a dinâmica do observador faz parte da malha fechada, forçosamente.

Estimadores são, por projeto, sistemas estáveis, logo a presença dos autovalores de  $G$  na dinâmica final deve ser aceita com tranquilidade. Além disto, as equações acima deixam bem claro que há uma “separação” entre os comportamentos dos sistemas envolvidos. O próximo exemplo mostra as diferenças entre a montagem de uma lei de controle ideal e a implementação da mesma lei via estimadores assintóticos de estado.

**Exemplo 2.9.1** *Seja a planta  $\mathcal{P}$  para a qual as matrizes são:*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0]; \quad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

*Esta planta é instável, mas uma simples aplicação das técnicas de síntese mostraria que a lei de controle  $u = Fx = [1 \ 2]x$  a estabiliza, colocando os autovalores da malha fechada em  $-1 \pm j$ . As equações da malha fechada seriam:*

$$\mathcal{P}_f \begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BF)x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x(t); & x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ y(t) = Cx(t) = [1 \ 0]x(t) \end{cases}$$

*onde qualquer semelhança com coisas já conhecidas talvez não seja mera coincidência. O método de projeto mostrado nos exemplos da seção anterior pode ser empregado para obter o seguinte estimador de ordem completa e dinâmica caracterizada por autovalores em  $-1$ :*

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} y(t); \quad z(0) = 0$$

$$w(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} y(t)$$

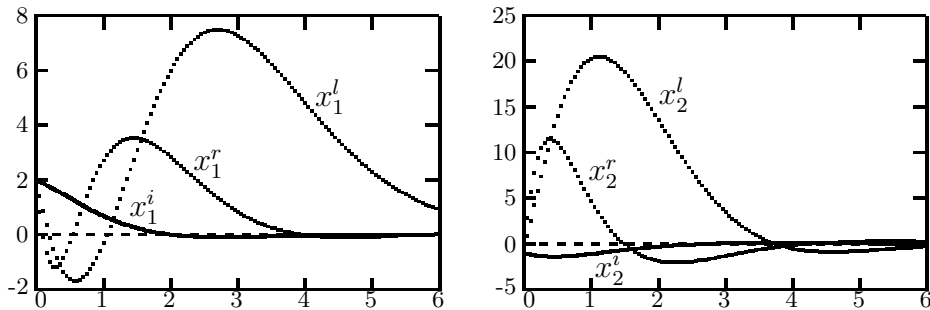
Os leitores são encorajados a refazer os cálculos. Este projeto pode ser considerado um estimador lento, pois seus autovalores tem parte real igual à parte real dos autovalores da planta. Um estimador mais rápido, com dinâmica ditada por autovalores em  $-5$ , seria, como os leitores certamente verificarão:

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 24 \\ 37 \end{bmatrix} y(t); \quad z(0) = 0$$

$$w(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix} y(t)$$

Uma palavrinha de aviso. O método de projeto visto até agora pode ser aplicado, como está realmente sendo, a exemplos simples como estes. A finalidade deles é apenas ilustrar as RFO. O próximo capítulo será inteiramente dedicado a descrever, detalhar e discutir métodos mais elaborados de projeto, certamente aplicáveis a casos mais gerais do que estes.

As figuras abaixo mostram o comportamento, obtido via simulação, que a malha fechada teria nas condições ideais, se as variáveis de estado fossem usadas no controle  $u = Fx$ . Estas curvas são rotuladas como  $x_1^i$  e  $x_2^i$ . As figuras também mostram as curvas obtidas quando se realimenta a planta com a lei  $u = Fw$ , factível na prática. Os rótulos são agora  $x_1^l$  e  $x_2^l$  para o estimador lento, e  $x_1^r$  e  $x_2^r$  para o rápido.



Desempenho dos Observadores Completos e do Controle Ideal

Como seria de se esperar, o desempenho do observador com autovalores em  $-5$  é mais satisfatório: as variáveis se aproximam mais rapidamente das curvas ideais. Deve-se reconhecer, entretanto, que mesmo neste melhor caso o comportamento transitório é caracterizado por um pico cuja amplitude pode ser inaceitável em algumas aplicações práticas. Algumas possibilidades se apresentam para combater este inconveniente. As condições iniciais do observador sempre podem ser ajustadas para aperfeiçoar a convergência. Esta estratégia certamente melhoraria o defeito apontado, mas ela pressupõe o conhecimento das condições iniciais da planta para que se possa escolher as do observador, e isto pode torná-la impraticável.

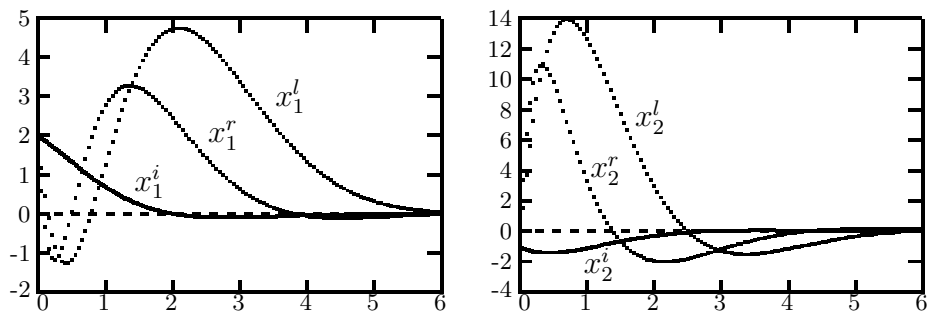
Pode-se pensar em melhorar o desempenho transitório mudando os autovalores do observador. Uma maneira sistemática para estudar a influência da dinâmica dos estimadores nos resultados finais do controle será vista oportunamente, no capítulo dos observadores “ótimos”, quando técnicas de Controle Ótimo Linear Quadrático serão inseridas no projeto. Observadores mínimos também podem ajudar, pois permitem estimativas perfeitas para algumas das variáveis de estado, e isto pode ser suficiente para corrigir ou pelo menos minorar os problemas detectados. Um estimador mínimo e lento para a planta em estudo, com autovalores em  $-1$  tem as seguintes equações:

$$\dot{z}(t) = -z(t) + 2u(t) + y(t); \quad w(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} y(t)$$

Reprojetando para os autovalores em  $-5$  o resultado seria

$$\dot{z}(t) = -5z(t) + 6u(t) + 37y(t); \quad w(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \end{bmatrix} y(t)$$

A simulações destes novos esquemas fornece as seguintes curvas:



*Desempenho dos Observadores Mínimos e do Controle Ideal*

As amplitudes do transitório foram reduzidas, e o comportamento global do controlador se tornou mais aceitável. Embora a finalidade principal destes

*exemplos tenha sido a de demonstrar a validade do uso de estimadores em leis de controle, um aspecto sobre observadores completos e mínimos chamou a atenção. Pelo menos para este exemplo o projeto usando estimadores mínimos foi superior. Isto aconteceria sempre? Pelo fato de gerarem estimativas perfeitas para algumas das variáveis, os observadores mínimos são opções sempre interessantes, que podem ser tentadas em qualquer problema de síntese.*

Os resultados acima garantem que, mesmo usando o estado estimado, conseguiremos posicionar arbitrariamente os autovalores da malha fechada, e as possíveis interferências entre os dois sistemas, planta e observador, serão inofensivas pois suas dinâmicas permanecerão desacopladas e independentes. As equações (2.9) e (2.10) também mostram que o sinal  $e = z - Tx$  é incontrolável por  $u$ . Isto significa que a matriz de transferência relacionando  $y$  e  $v$  ficaria:

$$Y(s) = C(sI - A - BF)^{-1}BV(s)$$

Esta expressão poderia levar a concluir que o observador não influencia a malha fechada e que o efeito da lei de controle seria absolutamente igual quer pudéssemos medir integralmente o estado quer usássemos um estimador. A realidade não é bem assim, conforme os exemplos anteriores apontaram: o uso de observadores permite atingir os efeitos globais desejados, mas distorce os sinais envolvidos.

Para conciliar esta última expressão com a realidade mostrada nos exemplos, lembremos que a matriz de transferência acima descreve o comportamento da malha fechada quando as condições iniciais são nulas:  $x_0 = e_0 = 0$ . Se estes estados iniciais não forem nulos, como nos exemplos, a inclusão do observador na malha afetará os sinais. Mas apenas durante o transitório: ao longo do tempo esta ação diminui e a convergência assintótica às curvas ideais é preservada.

## 2.10 Robustez, Monitores e Compensadores

Que aconteceria se um observador fosse construído com matrizes que não são exatamente as de projeto? ou então se a planta funcionasse com valores diferentes dos valores nominais do modelo? A teoria diz que precisamos construir um sistema dinâmico com matrizes que, junto com as da planta, satisfazem as RFO. No entanto, imperfeições práticas inevitáveis podem fazer com que os valores efetivamente usados na planta e no observador sejam diferentes

dos valores nominais e de projeto. Na maioria das vezes as diferenças são pequenas, mas mesmo assim é necessário encarar um problema desagradável: esse sistema imperfeito é capaz de continuar estimando?

Seja uma planta descrita por  $\langle A_0, B_0, C_0 \rangle$  para a qual projetamos um observador caracterizado pelas matrizes  $G_0, H_0, J_0, M_0$  e  $N_0$ . Isto significa que as RFO são verificadas para estes dados:

$$TA_0 - G_0T = J_0C_0 \quad (2.11)$$

$$TB_0 = H_0 \quad (2.12)$$

$$M_0T + N_0C_0 = I_n \quad (2.13)$$

$$\lambda(G_0) \in \mathbb{C}^- \quad (2.14)$$

De modo geral, sendo  $V_0$  o valor de projeto, ou nominal, de uma dada grandeza, o seu valor real ou efetivo  $V$  será diferente de  $V_0$ , por causa das imperfeições mencionadas acima. Os componentes podem ter seus valores numéricos alterados por envelhecimento, ou por efeito de calor ou humidade, ou então por imprecisão de medida, ou por vários outros motivos possíveis. Normalmente se escreve  $V = V_0 + \delta V$  e dizemos que  $\delta V$  é uma **perturbação** da grandeza. No caso matricial a perturbação  $\delta V$  é uma matriz com as mesmas dimensões de  $V_0$ . Supondo então que o observador é construído com componentes reais teremos suas matrizes dadas por

$$G = G_0 + \delta G$$

$$H = H_0 + \delta H$$

$$J = J_0 + \delta J$$

$$M = M_0 + \delta M$$

$$N = N_0 + \delta N$$

Se os valores modelados para a planta variam, ou são inexatos, temos

$$A = A_0 + \delta A$$

$$B = B_0 + \delta B$$

$$C = C_0 + \delta C$$

Usar componentes precisos na implementação, ou então ter um modelo confiável, significa que os  $\delta A, \delta B, \delta C, \delta G, \delta H, \delta J, \delta M$  e  $\delta N$  são “pequenos.” Para tornar mais precisa esta linguagem devemos considerar as classes de perturbações: sendo o real  $\epsilon > 0$  diremos que o símbolo  $\Omega_V(\epsilon)$  denota a classe de perturbações  $\delta V$  cujos elementos são, em módulo, estritamente menores do que  $\epsilon$ :

$$\Omega_V(\epsilon) = \{\delta V \mid \forall i, j \mid |(\delta V)_{ij}| < \epsilon\}$$

Quando o valor de  $\epsilon$  é pouco importante chamaremos  $\Omega_V(\epsilon)$  de **classe de perturbações arbitrariamente pequenas** de  $V_0$ . Para fixar os conceitos vamos enunciar um resultado conhecido da teoria matricial:

**Teorema 2.10.1** *Sendo  $M_0$  uma matriz quadrada real com  $\lambda(M_0) \subset \mathbb{C}^-$  então existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\lambda(M_0 + \delta M) \subset \mathbb{C}^-$  para perturbações  $\delta M \in \Omega_M(\epsilon)$ .*

Este resultado diz que se os elementos de uma matriz “estável” forem submetidos a perturbações dentro de certos limites a matriz resultante continua “estável.” O cálculo do valor máximo de  $\epsilon$  que ainda preserva a propriedade está associado à determinação do raio da hiperesfera de estabilidade. Detalhes maiores sobre esses assuntos não serão vistos aqui; basta-nos saber que perturbações “razoáveis” de uma dada matriz quadrada preservam a sua estabilidade.

A questão natural levantada por estas considerações é: projetado um observador  $\langle G_0, H_0, J_0, M_0, N_0 \rangle$  para a planta  $\langle A_0, B_0, C_0 \rangle$ , o dispositivo montado com os valores reais  $\langle G, H, J, M, N \rangle$  dados como acima continuará funcionando a contento? E se a planta é descrita não pelos valores nominais acima, mas por  $\langle A, B, C \rangle$ ?

Começemos investigando as RFO; se elas continuarem sendo satisfeitas pelos valores perturbados então o dispositivo efetivamente construído funciona como estimador e pode continuar a ser chamado de observador. Lembrando que a matriz  $T$  tem existência apenas abstrata e não precisa ser implementada por qualquer sistema real podemos escrever

$$T(A_0 + \delta A) - (G_0 + \delta G)T = (J_0 + \delta J)(C_0 + \delta C) \quad (2.15)$$

$$T(B_0 + \delta B) = (H_0 + \delta H) \quad (2.16)$$

$$(M_0 + \delta M)T + (N_0 + \delta N)(C_0 + \delta C) = I_n \quad (2.17)$$

$$\lambda(G_0 + \delta G) \in \mathbb{C}^- \quad (2.18)$$

O teorema 2.10.1 garante a validade da última destas equações, para perturbações  $\delta G$  adequadas. Para que as três primeiras equações continuem sendo satisfeitas é necessário e suficiente que

$$T(\delta A) - (\delta G)T - J_0(\delta C) = (\delta J)C_0 + (\delta J)(\delta C) \quad (2.19)$$

$$T(\delta B) = \delta H \quad (2.20)$$

$$(\delta M)T + N_0(\delta C) + (\delta N)C_0 + (\delta N)(\delta C) = 0 \quad (2.21)$$

Estas relações ensinam que as RFO permanecem válidas desde que as perturbações satisfaçam um conjunto bem definido de restrições. Como os parâmetros do mundo real variam de maneira totalmente arbitrária, sem sequer supor que deveriam fazê-lo de acordo com certas regras, podemos estabelecer o

**Fato 2.10.1** *As RFO dadas pelas equações 2.11, 2.12 e 2.13 deixam de ser satisfeitas para quase quaisquer perturbações  $\delta G, \delta H, \delta J, \delta M$  e  $\delta N$  dos valores de projeto e  $\delta A, \delta B, \delta C$  dos valores nominais.*

O que significa dizer que as RFO deixam de ser satisfeitas? o dispositivo perde completamente a capacidade de estimar os estados da planta? Vejamos alguns exemplos. A “capacidade de estimar” de um observador será medida pelo comportamento do erro de estimação para  $t \rightarrow \infty$ : quando  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$  temos uma estimação perfeita, quando  $\varepsilon(t)$  não se anula mas permanece limitado temos um caso que pode ou não ser aceito e finalmente, quando o erro cresce indefinidamente temos uma falha total do aparelho. Em primeiro lugar consideraremos o caso de modelo perfeito, ou seja, os parâmetros do observador podem ser perturbados, mas os da planta não:  $\delta A = \delta B = \delta C = 0$ .

**Exemplo 2.10.1** *Seja a planta:*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} u(t); \quad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad y(t) = [1 \quad 0]x(t)$$

*para a qual se projeta um estimador*

$$\dot{z}(t) = G_0 z(t) + H_0 u(t) + J_0 y(t); \quad z(0) = z_0$$

$$w(t) = M_0 z(t) + N_0 y(t)$$

*com valores nominais dados por*

$$G_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad H_0 = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \end{bmatrix}; \quad J_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad z_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad N_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

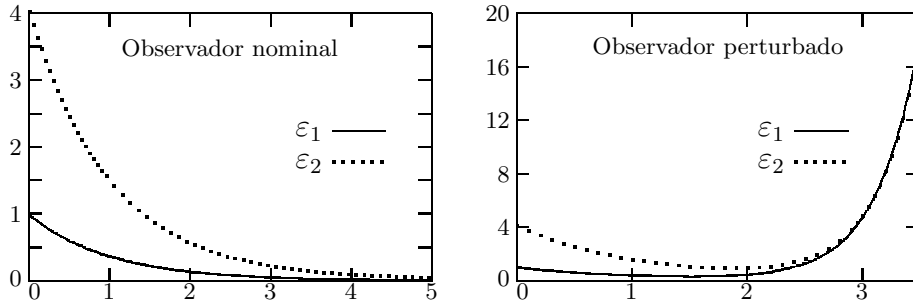
*A sua dinâmica é caracterizado por autovalores em  $-1$ , e sua função é estimar os estados da planta para entrada em degrau unitário  $u(t) = 1(t)$ . Supomos que o dispositivo efetivamente construído opera com os valores*

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \end{bmatrix}; \quad J = \begin{bmatrix} -0,99 \\ -1,00 \end{bmatrix}; \quad z_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$



$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Estes valores perturbados são notavelmente próximos dos nominais: apenas o elemento  $j_{11}$  de  $J$  tem seu valor alterado, e esta mudança é praticamente desprezível. Os gráficos abaixo mostram o comportamento do erro de estimação  $\varepsilon(t) = w(t) - x(t)$ , obtido por simulação. Para o observador nominal o erro tende a zero e a estimação é perfeita, conforme o esperado, mas para os valores perturbados o erro diverge e qualquer possibilidade de estimação se perde.



Consideremos agora a planta  $\mathcal{P}$  estudada nos exemplos 2.6.1 e 2.7.1:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} u(t); \quad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

O estimador então projetado obedecia às seguintes equações:

$$\dot{z}(t) = G_0 z(t) + H_0 u(t) + J_0 y(t); \quad z(0) = z_0$$

$$w(t) = M_0 z(t) + N_0 y(t)$$

com valores nominais dados por

$$G_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad H_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad J_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad z_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad N_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

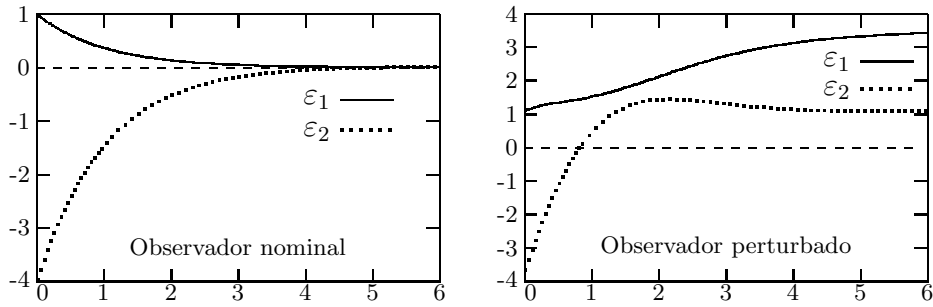
O desempenho resultante é caracterizado por autovalores em  $-1$ . Aplicando como entrada um degrau unitário  $u(t) = 1(t)$  verificamos no exemplo 2.7.1 que as variáveis  $w_1$  e  $w_2$  estimam as variáveis  $x_1$  e  $x_2$ , ou seja, o erro de estimação  $\varepsilon(t) = w(t) - x(t)$  tende assintoticamente a zero. Passamos

agora a supor que os valores de projeto sofrem perturbações e o dispositivo efetivamente construído opera com valores

$$G = \begin{bmatrix} -1,5 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} -1,7 \\ -3,0 \end{bmatrix}; \quad J = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,0 \end{bmatrix}; \quad z_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1,1 & -0,8 \\ 0,5 & 0,0 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} 1,3 \\ -1,1 \end{bmatrix}$$

As perturbações escolhidas são consideráveis: há variações de 50 %, 100 % e até mesmo a perda total de um componente, o  $j_{21}$ . Note-se que os zeros em  $A$  não foram perturbados, pois se supõe que elementos nulos indicam a ausência de um elemento físico cujo valor possa sofrer variação. O gráfico abaixo mostra o comportamento do erro de estimação  $\varepsilon(t) = w(t) - x(t)$ , obtido por simulação, para o observador nominal e o real:



O comportamento deste observador pode ser considerado aceitável, pois embora o erro deixe de tender a zero, ele se mantém limitado. É razoável especular que, fossem as perturbações mais suaves (da ordem de 10%, como é comum na prática), este erro convergiria para valores próximos de zero e o observador perturbado teria um desempenho praticamente normal.

No primeiro caso deste exemplo uma perturbação mínima em apenas um elemento da implementação causava mudanças dramáticas no funcionamento do dispositivo, configurando um comportamento inaceitável para um observador real. Neste segundo caso, para perturbações exageradamente intensas os efeitos foram menos violentos.

Este exemplo permite concluir que mudanças nos valores de projeto de um observador podem alterar a sua capacidade de estimar estados. Há casos em que o erro de estimação deixa de ser nulo, mas permanece limitado; em outras situações, mais drásticas, o observador perturbado perde completamente a capacidade de estimar. Para uma análise mais geral, seja a

planta  $\mathcal{P}$  modelada por  $\langle A_0, B_0, C_0 \rangle$ , supostos fixos, e um observador com implementação real descrita por

$$\mathcal{O} \begin{cases} \dot{z}(t) = (G_0 + \delta G)z(t) + (H_0 + \delta H)u(t) + (J_0 + \delta J)y(t) \\ w(t) = (M_0 + \delta M)z(t) + (N_0 + \delta N)y(t) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

onde os valores nominais  $\langle G_0, H_0, J_0, M_0, N_0 \rangle$  solucionam as RFO. De acordo com os desenvolvimentos teóricos da seção 2.5, temos a expressão  $\varepsilon(t) = Me(t)$  relacionando o erro de estimação  $\varepsilon(t)$  ao erro de operação  $e(t) = z(t) - Tx(t)$ . Mas as colunas de  $M$  são linearmente independentes por hipótese, logo  $\varepsilon(t)$  tende a zero se e somente se  $e(t)$  também o faz. Desenvolvendo a derivada de  $e(t)$  e usando 2.11 e 2.12 temos

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{z} - T\dot{x} \\ &= (G_0 + \delta G)z + (H_0 + \delta H)u + (J_0 + \delta J)y - T(A_0x + B_0u) \\ &= (G_0 + \delta G)z + (H_0 + \delta H - TB_0)u + (J_0C_0 + (\delta J)C_0 - TA_0)x \\ &= G_0z + (\delta G)z + (\delta H)u + (\delta J)C_0x - G_0Tx \\ &= G_0e + (\delta G)z + (\delta H)u + (\delta J)C_0x \end{aligned}$$

Estamos supondo modelo perfeito, ou seja,  $\delta A = \delta B = \delta C = 0$ . As equações 2.19 e 2.20 ficam

$$(\delta G)T + (\delta J)C_0 = 0 \quad \text{e} \quad \delta H = 0$$

Admitindo que estas restrições são satisfeitas o erro passa a ser descrito por

$$\dot{e}(t) = G_0e(t) + (\delta G)z(t) - (\delta G)Tx(t) = (G_0 + \delta G)e(t)$$

Como  $G_0$  é estável por projeto, o teorema 2.10.1 garante que  $G_0 + \delta G$  também o será, para perturbações  $\delta G$  razoáveis. Mas este é o gargalo, como já comentamos. No mundo real nada se pode garantir a priori a respeito das perturbações e devemos considerar a expressão completa

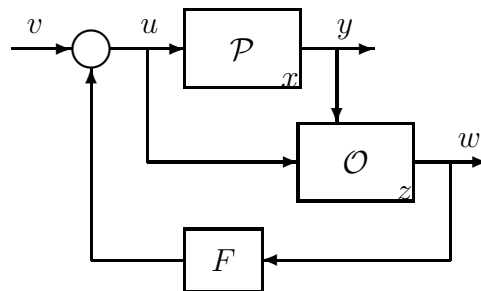
$$\dot{e}(t) = G_0e(t) + (\delta G)z(t) + (\delta H)u(t) + (\delta J)C_0x(t)$$

Sendo  $z(t)$ ,  $u(t)$  e  $x(t)$  sinais limitados podemos garantir que  $e(t)$  também o será, pois  $G_0$  é estável. E mais, se os sinais tendem a valores de regime constantes  $e(t)$  também tenderá. Neste caso, supondo que as perturbações  $\delta G$ ,  $\delta H$  e  $\delta J$  são “pequenas” podemos admitir que  $e(t)$  e  $\varepsilon(t)$  tendem para valores de regime próximos de 0, ou seja, o observador é pouco sensível.

Entretanto, quando algum (ou vários) dos sinais  $z(t)$ ,  $u(t)$  e  $x(t)$  crescem indefinidamente,  $e(t)$  e  $\varepsilon(t)$  também o farão, a menos de certos casos muito particulares. Vejamos por exemplo o caso de uma planta instável com uma condição inicial  $x_0$  que faz com que  $x(t) \rightarrow \infty$ ; a única possibilidade de este sinal não contaminar  $e(t)$ , levando-o também a crescer sem limites, é exigir que as matrizes  $G_0$  e  $(\delta J)C_0$  formem um par incontrolável. Mas a controlabilidade é uma propriedade genérica, e então isto poderia acontecer apenas para valores muito especiais da perturbação. Como a Natureza não se dá ao trabalho de calcular estes valores e, caprichosamente, insiste em perturbar grandezas físicas de maneira arbitrária e imprevisível, percebemos a impossibilidade de se construir um observador confiável nestas situações.

Dizemos que um **Monitor de Estados** é um observador construído com a finalidade única de fornecer uma cópia visualizável de variáveis de estado remotas ou inacessíveis. Esta cópia (a saída  $w(t)$  do aparelho) é normalmente utilizada em tempo real, para se acompanhar a evolução do processo ou sistema, dando aos seus operadores informações úteis sobre o desempenho e que facilitam a tomada de decisões. Ficou estabelecido nas linhas prévias que o funcionamento dos monitores de estado é bastante sensível a variações nos valores nominais de modelagem e projeto. Um estudo teórico pode ser feito para prever com mais exatidão as situações perigosas e para construir artefatos mais robustos, na medida do possível. Isto não será feito nestas páginas porque, do ponto de vista de Controle, os observadores são utilizados para funções diferentes das de apenas monitorar estados.

Em Controle, observadores são empregados para viabilizar realimentações de estados  $x$  inalcançáveis, por meio de seus substitutos  $w$ : implementamos  $u = Fw + v$  ao invés de  $u = Fx + v$ . Um estudo detalhado foi feito na seção 2.9. O diagrama básico é reproduzido agora:



Este diagrama apresenta uma particularidade interessante: o sinal  $w$  é multiplicado por  $F$  e injetado no somador inicial, configurando um caso básico de realimentação. É bem sabido do Controle Clássico que reali-

mentações negativas tem a tendência de tornar os sistemas de malha fechada menos sensíveis a perturbações. Aconteceria aqui a mesma coisa? A realimentação caracterizada por  $F$  pode ser considerada negativa? Ainda de acordo com a seção 2.9, o diagrama de malha fechada acima pode ser descrito pelas equações 2.9 e 2.10, aqui repetidas para os valores nominais

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 + B_0 F_0 & B_0 F_0 M_0 \\ 0 & G_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (2.22)$$

$$y = [C_0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}; \quad w = [I \ M_0] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

A entrada de referência  $v$  pode ser considerada zero, e assim o sistema acima pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 + B_0 F_0 & B_0 F_0 M_0 \\ 0 & G_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Quando a realimentação de estados é calculada para estabilizar a malha fechada temos  $\lambda(A_0 + B_0 F_0) \subset \mathcal{C}^-$ . Observadores, por projeto, são sistemas estáveis, logo o sistema expandido acima é estável, pelo menos para os valores nominais. Mas aqui entra o teorema 2.10.1 para garantir que

**Fato 2.10.2** *Quando um observador é usado como parte de uma lei de controle estabilizadora por realimentação de estados, o sistema resultante é robusto, ou seja, permanece estável para perturbações nos valores de projeto ou modelados pertencentes a uma certa classe.*

De maneira geral, dispositivos usados para implementar leis de controle são chamados de **compensadores**. Se a finalidade principal é a estabilização temos **compensadores estabilizadores**, ou simplesmente **estabilizadores**. Este último resultado diz que quando um observador faz parte de um compensador estabilizador por realimentação de estados a implementação global é capaz de suportar perturbações.

**Exemplo 2.10.2** *Seja a planta:*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} u(t); \quad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad y(t) = [1 \ 0] x(t)$$

*para a qual se projeta o estimador*

$$\dot{z}(t) = G_0 z(t) + H_0 u(t) + J_0 y(t); \quad z(0) = z_0$$

$$w(t) = M_0 z(t) + N_0 y(t)$$

com valores nominais dados por

$$G_0 = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}; \quad H_0 = \begin{bmatrix} -13 \\ -13 \end{bmatrix}; \quad J_0 = \begin{bmatrix} -78 \\ -78 \end{bmatrix}; \quad z_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad N_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Como a planta é instável, este aparelho será, quase certamente, muito sensível a perturbações, e sua utilização prática como monitor de estados para esta planta pode ser descartada. A idéia agora é usá-lo em uma lei estabilizadora. Uma realimentação  $u = F_0 x$  com  $F_0 = [74 \ 68]/13$  coloca os autovalores de  $A_0 + B_0 F_0$  em  $-4$ , estabilizando portanto a malha fechada. Usando o observador acima para implementar a lei  $u = F_0 w$  encontraríamos, seguindo os desenvolvimentos da seção 2.9, a seguinte equação para o sistema planta+observador+lei de controle:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 + B_0 F_0 N_0 C_0 & B_0 F_0 M_0 \\ J_0 C_0 + H_0 F_0 N_0 C_0 & G_0 + H_0 F_0 M_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

onde os valores nominais para a planta e para a lei de controle são os fornecidos. Vamos supor agora perturbações nestes dados, que passam a ser:

$$A = A_0 + \delta A = \begin{bmatrix} 0,0 & 0,5 \\ 1,0 & 2,5 \end{bmatrix}; \quad B = B_0 + \delta B = \begin{bmatrix} 0,1 \\ -1,2 \end{bmatrix};$$

$$C = C_0 + \delta C = [0,7 \ 0,0]; \quad F = F_0 + \delta F = [10 \ 24]/12$$

$$G = G_0 + \delta G = \begin{bmatrix} -0,6 & 0,0 \\ 0,0 & -1,3 \end{bmatrix}; \quad H = H_0 + \delta H = \begin{bmatrix} -1,0 \\ -5,5 \end{bmatrix};$$

$$J = J_0 + \delta J = \begin{bmatrix} -0,1 \\ -0,8 \end{bmatrix}; \quad M = M_0 + \delta M = \begin{bmatrix} 1,1 & -0,8 \\ 0,5 & 0,0 \end{bmatrix};$$

$$N = N_0 + \delta N = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 1,1 \end{bmatrix}; \quad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad z_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Os leitores são convidados a verificarem a estabilidade do sistema perturbado. As perturbações acima estão dentro do limite que se convencionou chamar de “razoáveis” e que permitem o funcionamento robusto do compensador? ou seria necessário diminuí-las?

Até este ponto a análise se concentrou em modelos perfeitos, e portanto fixos, e observadores com parâmetros perturbáveis. No entanto, uma hipótese

mais realista de trabalho seria a oposta. É razoável supor que podemos usar componentes de alta qualidade e precisão nas implementações dos observadores. Eles serão mais caros, lógico, mas espera-se que seus valores variem pouco. Indo ainda mais além, se o observador for implementado em computador digital podemos até mesmo considerar uma implementação perfeita, pois os parâmetros de projeto não estão associados a grandezas físicas, e sim a dados de um programa, que uma vez digitados e armazenados podem ser considerados fixos e imperturbáveis.

A planta, por outro lado, está restrita a uma existência no mundo físico, com todas as suas imperfeições e parâmetros variantes. Mais grave ainda: mesmo supondo que os parâmetros da planta sejam fixos, quem nos garante que os seus valores nominais correspondem à realidade? Os métodos conhecidos de identificação podem ser inexatos e originar modelos  $\langle A_0, B_0, C_0 \rangle$ , diferentes dos valores reais  $\langle A_r, B_r, C_r \rangle$ . Seja então, a partir de agora, observadores fixos e plantas perturbadas. As equações 2.19, 2.20 e 2.21 passam a ser

$$T(\delta A) - J_0(\delta C) = 0 \quad (2.25)$$

$$T(\delta B) = 0 \quad (2.26)$$

$$N_0(\delta C) = 0 \quad (2.27)$$

Os desenvolvimentos e conclusões são muito semelhantes aos já feitos para o caso anterior, de modelo perfeito e estimador perturbado, e os leitores são convidados a refazerem o caminho. Em resumo: monitores de estado são muito sensíveis e tem seus comportamentos afetados, sempre. Às vezes as consequências são toleráveis e os erros de estimação finitos. Outras vezes, para plantas instáveis, os erros tendem a infinito e inviabilizam qualquer tentativa de implementação.

Para observadores funcionando em malhas estabilizadoras já se pode garantir a continuação do funcionamento nominal mesmo em presença de perturbações. Para cada caso, entretanto, é preciso determinar com exatidão a amplitude máxima das perturbações admissíveis.

Por tudo que vimos, os estimadores de estado podem e devem ser usados sem receios na implementação prática de compensadores estabilizadores por realimentação de estados. Nestas condições eles se constituem em uma ferramenta de síntese eficaz e eficiente.

## 2.11 Comentários e Referências

A teoria básica dos observadores, vista neste capítulo, deve-se a Luenberger e pode ser vista em ..... como exposta pelo autor. As primeiras preocupações

com a robustez datam do início da década de 1970, como pode ser visto em .... (Bhatta papers). Resultados adicionais em robustez e, em particular, resultados sobre a hiperesfera de estabilidade podem ser encontrados em .... (Bhatta book) ou muitos outros.



# Capítulo 3

## Observadores, construção

### 3.1 Introdução

O objetivo agora é essencialmente prático: construir um observador  $\mathcal{O}$  para uma dada planta  $\mathcal{P}$ . Já vimos que este problema pode ser transformado em um problema de Álgebra Matricial: dadas as matrizes reais  $A(n \times n)$ ,  $B(n \times m)$  e  $C(r \times n)$  encontrar, se possível, matrizes reais

$$\begin{array}{lll} T(o \times n), & G(o \times o), & H(o \times m), \\ J(o \times r), & M(n \times o), & N(n \times r) \end{array}$$

com  $o \leq n$  tais que as expressões abaixo, chamadas de Relações Fundamentais dos Observadores, se verifiquem

$$TA - GT = JC \quad (3.1)$$

$$TB = H \quad (3.2)$$

$$MT + NC = I_n \quad (3.3)$$

$$\lambda(G) \in \mathbb{C}^- \quad (3.4)$$

Tendo encontrado uma solução para este Problema Matemático Associado, construiríamos o sistema dinâmico descrito pelas equações:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Gz(t) + Hu(t) + Jy(t) \\ w(t) = Mz(t) + Ny(t) \end{cases}$$

que seria o observador procurado e estimaria assintoticamente os estados inacessíveis da planta. Apresentaremos neste capítulo diversos métodos para resolver o problema matemático associado. A cada um deles relacionaremos um observador. Comparações e comentários serão feitos.

## 3.2 Método # 1

Veremos neste primeiro caso uma maneira simples e direta de encontrar um observador para uma dada planta. Para resolver o problema matemático associado consideraremos

$$T = I_n$$

Esta escolha já define a ordem do estimador:  $o = n$ . E mais, (3.2) garante que  $H = B$ . Uma maneira trivial de satisfazer (3.3) é  $M = I_n$  e  $N = 0$ . Falta atender as equações (3.1) e (3.4). Isto se resume a encontrar  $J$  tal que

$$G = A - JC$$

tenha seus autovalores em  $\mathbb{C}^-$ . Este problema é conhecido no estudo de sistemas lineares, e sua solução está relacionada aos conceitos de observabilidade e detetabilidade do par  $\langle C, A \rangle$ . Mais detalhes virão em breve; por enquanto, supondo que a planta é observável, pode-se garantir, por dualidade, que o par  $\langle A^T, C^T \rangle$  é controlável. Agora, encontrar  $F$  tal que o espectro de  $A^T + C^T F$  seja livremente designável é algo bem conhecido, pode-se usar as técnicas vistas no capítulo 1. Mas

$$\lambda(A^T + C^T F) = \lambda(A^T + C^T F)^T = \lambda(A + F^T C)$$

Com isto, verificamos que a matriz  $J = -F^T$  é a solução procurada, e já poderíamos construir o observador.

### Algoritmo 3.2.1 — Construção de Observadores, método #1

*Este algoritmo permite a escolha de matrizes que satisfazem as RFO e a subsequente construção de observadores de ordem  $n$ . A planta é observável, ou, no mínimo, detetável, e as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os dados iniciais, bem como os autovalores desejados para o estimador.*

**Passo 1:** Encontrar  $F(r \times m)$  tal que os autovalores da matriz  $A^T + C^T F$  estejam em  $\mathbb{C}^-$ .

**Passo 2:** Calcular  $J = -F^T$ .

**Passo 3:** As matrizes  $J$ ,  $T = I_n$ ,  $G = A - JC$ ,  $H = B$ ,  $M = I_n$  e  $N = 0$  satisfazem as RFO.

**Passo 4:** O estimador procurado é descrito por

$$\mathcal{O} \begin{cases} \dot{z}(t) = Gz(t) + Hu(t) + Jy(t) \\ w(t) = z(t) \end{cases}$$

**Exemplo 3.2.1** Seja a planta  $\mathcal{P}$  descrita por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

As primeiras escolhas são triviais:

$$T = I_3 \quad H = B \quad M = I_3 \quad N = 0$$

Para determinar  $J$ , seja o par dual

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Supondo que desejamos uma rapidez de convergência caracterizada por autovalores localizados em  $-1$ , ou seja, por um polinômio  $\Delta^*(s) = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$ , podemos usar Ackerman:

$$F = -[0 \quad 0 \quad 1]\Delta^*(A^T) = [0 \quad 0 \quad -1](A^T + I)^3 = [-6 \quad -23 \quad -83]$$

Daqui tiramos

$$J = -F^T = \begin{bmatrix} 6 \\ 23 \\ 83 \end{bmatrix} \quad e \quad G = A - JC = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -23 & 0 & 1 \\ -82 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

O observador pretendido é dado por

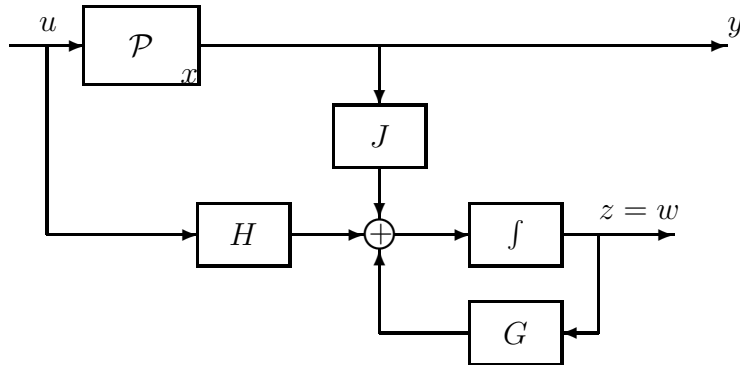
$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -23 & 0 & 1 \\ -82 & 2 & 3 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 6 \\ 23 \\ 83 \end{bmatrix} y(t) \\ w(t) &= z(t) \end{aligned}$$

Em resumo, para construir um observador para a planta  $\langle A, B, C \rangle$  por meio deste método #1 devemos escolher

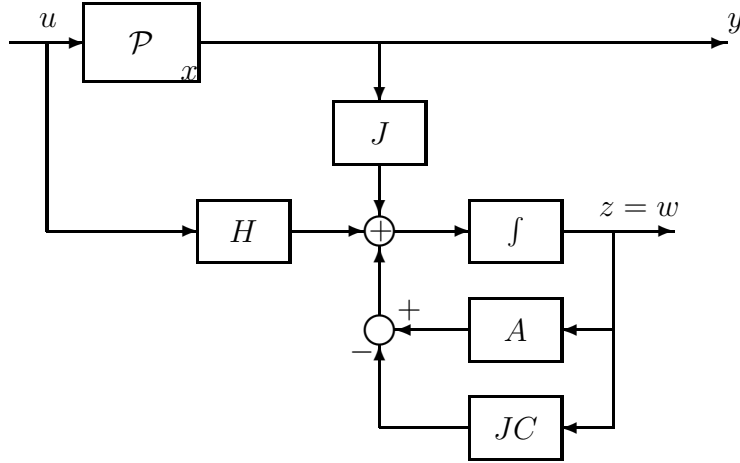
$$\begin{aligned} T &= I_n \\ H &= B \\ M &= I_n \\ N &= 0 \end{aligned}$$

após o que o problema passa a ser encontrar  $J$  tal que  $G = A - JC$  tenha seus autovalores em  $\mathbb{C}^-$ . Havendo observabilidade, ou, menos ainda, detetabilidade, este problema tem solução. A teoria também garante que a observabilidade, por ser uma propriedade genérica, estará presente “quase sempre”. Para encontrar efetivamente uma solução podemos usar os resultados de dualidade e transformar o problema em um problema de realimentação de estados.

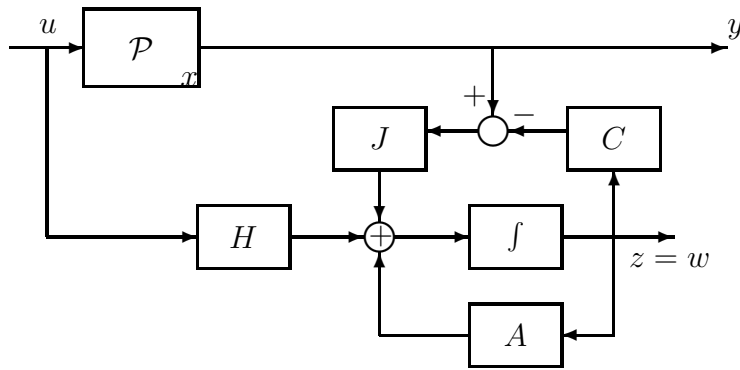
Este método fornece observadores de ordem completa ( $n$ ) e pode ser usado para plantas com qualquer número de variáveis de saída ( $r \geq 1$ ). Encontradas matrizes que satisfazem as relações fundamentais dos observadores, o próximo passo é a implementação física, de acordo com o diagrama



Lembrando que  $G = A - JC$  este diagrama pode ser modificado para outra forma equivalente:



ou ainda



Já vimos isto antes! Era o método “intuitivo” de encontrar uma estimativa para  $x$ , visto na seção (2.3). Mostramos agora a sua validade, ele é um caso particular do esquema geral, para  $o = n$  e  $T = I_n$ . Além desta interpretação, este método #1 fornece um procedimento simples, direto e geral para o projeto de estimadores assintóticos. Ele se aplica para qualquer número de saídas ou entradas da planta, e fornece um observador de ordem completa, com dimensão  $n$ , igual à da planta. A atrapalhar um pouco a simplicidade do método, haveria apenas o problema operacional da escolha de  $J$ . Como escolher um  $J$  estabilizante de maneira suave? A possibilidade de se usar os resultados duais e recair em uma situação conhecida já foi mostrada. Uma possível estratégia alternativa envolveria o uso de formas canônicas. Antes de ilustrar estas técnicas, veremos outro tipo de observador muito semelhante a este primeiro caso. Mas, antes ainda disto,

### 3.3 Um pouco de teoria

O problema de, dadas  $A$  e  $C$  encontrar  $J$  de modo a alocar com total liberdade os autovalores de  $A - JC$  é bastante conhecido no estudo de sistemas lineares. Trata-se de um problema de designação de autovalores por meio de **injeção de saída**. As condições de existência de solução estão associadas aos conceitos de observabilidade e de detetabilidade do par  $\langle C, A \rangle$ :

**Definição 3.3.1** *Um par  $\langle C, A \rangle$  é detetável quando*

$$\text{posto} \begin{bmatrix} \lambda^+ I - A \\ C \end{bmatrix} = n$$

*para todo autovalor  $\lambda^+$  de  $A$  situado no semiplano direito fechado de  $\mathbb{C}$ .*

Uma interpretação desse conceito em termos de sistemas dinâmicos facilita o entendimento. Seja uma planta  $\mathcal{P}$  descrita da maneira usual:

$$\mathcal{P} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

A definição acima diz apenas que *a parte instável de  $A$  deve ser observável*. Dito de outra maneira, se há uma parte inobservável do estado da planta, esta parte deve ser estável. O próximo resultado atende exatamente os interesses atuais:

**Propriedade 3.3.1** *O par  $\langle C, A \rangle$  é detetável se e somente se existir uma matriz  $J$  tal que  $\lambda(A - JC) \subset \mathbb{C}^-$*

Os autovalores de  $A - JC$  devem estar todos na região “estável” do plano complexo. Poder encontrar  $J$  capaz dessa proeza é equivalente a ter o par  $\langle C, A \rangle$  detetável. O conceito de observabilidade é certamente mais familiar à maioria dos leitores. Apresentamos a seguir algumas propriedades bem conhecidas:

**Propriedade 3.3.2** *Um par  $\langle C, A \rangle$  é observável quando*

$$\text{posto} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n$$

*para todo autovalor  $\lambda$  de  $A$ .*

**Propriedade 3.3.3** *O par  $\langle C, A \rangle$  é observável se e somente se  $\lambda(A - JC)$  é arbitrariamente designável por escolha de  $J$*

**Propriedade 3.3.4** *Se o par  $\langle C, A \rangle$  é observável, então ele será também detetável*

Vemos assim que a detetabilidade é algo mais suave que a observabilidade. Se esta última estiver presente poderemos alocar livremente os autovalores de  $A - JC$ , por escolha de  $J$ . Se houver detetabilidade, garantimos menos: esses autovalores podem ser apenas colocados na região estável  $\mathbb{C}^-$ .

Observabilidade e controlabilidade são propriedades **genéricas**. Isto quer dizer que, para matrizes  $A, B$  e  $C$  escolhidas ao acaso, os pares  $\langle A, B \rangle$  e  $\langle C, A \rangle$  serão controláveis e observáveis **na grande maioria dos casos**. Apenas para escolhas muito particulares das matrizes as propriedades falhariam. Do ponto de vista prático esta situação é boa, pois significa que a maioria das plantas e dos sistemas de interesse é controlável e observável. Como detetabilidade é um requisito ainda menos exigente que observabilidade, vemos que, pelo menos para o Caso # 1, onde  $T = I_n$ , o problema de projetar observadores tem solução de maneira genérica. Seria preciso “muito esforço” para encontrar uma planta inobservável. E mais ainda para uma planta indetetável.

## 3.4 Método # 2

Usaremos agora uma matriz  $T(n \times n)$  inversível qualquer, não necessariamente a identidade. Mais um vez o observador terá ordem  $o = n$ . Escolhendo

$$H = TB, \quad M = T^{-1}, \quad N = 0$$

satisfazemos (3.2) e (3.3). Supondo mais uma vez que  $\langle C, A \rangle$  é observável, ou pelo menos detetável, seja  $\tilde{J}$  tal que  $A - \tilde{J}C$  tenha seus autovalores em  $\mathbb{C}^-$ . Escolhendo agora

$$G = T(A - \tilde{J}C)T^{-1} \quad \text{e} \quad J = T\tilde{J}$$

teríamos

$$\begin{aligned} TA - GT &= TA - T(A - \tilde{J}C)T^{-1}T \\ &= TA - TA + T\tilde{J}C \\ &= JC \end{aligned}$$

e com isto satisfazemos (3.1) e (3.4).

**Exemplo 3.4.1** *Seja a mesma planta do exemplo anterior:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

*Escolhendo*

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

*teríamos*

$$H = TB \quad M = T^{-1} \quad N = 0$$

*Supondo que desejamos mais uma vez uma rapidez de convergência caracterizada por autovalores localizados em  $-1$ , ou seja, por um polinômio  $\Delta^*(s) = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$ , podemos usar os resultados anteriores:*

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} 6 \\ 23 \\ 83 \end{bmatrix}$$

*Daqui temos*

$$J = T\tilde{J} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad e \quad G = T(A - \tilde{J}C)T^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*O observador pretendido é dado por*

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} y(t) \\ w(t) &= T^{-1}z(t) \end{aligned}$$

O leitor atento terá percebido que o estimador obtido por este processo é o mesmo do caso #1, mas suas equações dinâmicas estão em outra base. Assim, as avaliações e comentários sobre este método são as mesmas feitas anteriormente.



## 3.5 Uso de Formas Canônicas

A parte mais trabalhosa dos métodos já apresentados é a alocação dos autovalores de  $G$ ; o caminho sugerido era transformar este problema, através de dualidade, na busca de uma realimentação de estados  $F$  capaz de designar a contento o espectro de  $A^T + C^T F$ . Problemas deste tipo podem ser muito facilitados quando as matrizes envolvidas exibem determinadas formas canônicas, conforme visto no capítulo 1. A idéia desta seção é aproveitar possíveis vantagens oferecidas pela particular base em que se encontram as matrizes  $A$ ,  $B$ , e  $C$ . Assim, quando as equações dinâmicas da planta apresentarem certas estruturas particulares, o cálculo prático dos observadores poderá se simplificar.

Com isto queremos dizer que a carga computacional envolvida na resolução das relações fundamentais dos observadores pode ser abreviada. Em outras palavras, o problema de se encontrar uma injeção de saída  $J$  tal que  $\lambda(A - JC) \subset \mathbb{C}^-$  pode ter solução direta quando  $A$  e  $C$  estiverem em determinadas formas canônicas.

Aqui, como em quase tudo na vida, os ganhos vem acompanhados de custos, e o preço desta simplificação estaria no trabalho de se colocar as equações dinâmicas da planta na base conveniente. No que se segue apresentaremos uma forma canônica para sistemas com uma única variável de saída:  $r = 1$ . Um algoritmo para encontrar uma transformação de equivalência que coloque uma planta qualquer nesta particular forma é apresentado em seguida. Logo após se verá como esta forma canônica efetivamente facilita o projeto de observadores. Os casos de observadores de ordem completa e de ordem reduzida serão cobertos. Terminaremos a seção com alguns comentários.

### 3.5.1 Sistemas com uma única variável de saída

Consideremos uma planta linear e invariante no tempo descrita pelas equações dinâmicas tradicionais, onde  $A$  e  $C$  são:

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [ \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 ]$$

Seria imediato verificar que a matriz de observabilidade é inversível, donde a necessidade de o sistema ser observável. Calculando o polinômio característico de  $A$  encontraríamos:

$$\Delta_a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

Os coeficientes deste polinômio são os elementos da primeira coluna de  $A$ , com os sinais trocados. Esta forma canônica é bastante semelhante à forma canônica observável para sistemas com uma única saída. Sua utilidade fica clara ao notarmos que, sendo

$$J = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_n \end{bmatrix}$$

então o polinômio característico de  $A - JC$  seria dado por

$$s^n + (a_{n-1} + j_1)s^{n-1} + \cdots + (a_1 + j_{n-1})s + (a_0 + j_n)$$

e o problema de alocação de autovalores por meio de injeção de saída se resolveria de maneira trivial. Como este assunto é crucial para o estabelecimento da rapidez de convergência dos estimadores de estado, matrizes com este formato particular recebem o nome de **Forma Canônica do Observador**. Supondo agora que as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  da planta são quaisquer, gostaríamos de encontrar uma mudança de bases representada por  $Q$  ( $n \times n$ ), inversível, tal que

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= \tilde{A} \\ CQ &= \tilde{C} \end{aligned}$$

sejam como acima. Conseguindo isto, ou seja, estando em uma base onde as matrizes exibem a estrutura da Forma Canônica do Observador, o cálculo de  $\tilde{J}$  que aloca devidamente os autovalores de  $\tilde{A} - \tilde{J}\tilde{C}$  é direto, como visto nas linhas anteriores. A matriz capaz de fazer o serviço na base original seria dada por  $J = Q\tilde{J}$ . Estabelecemos a seguir o procedimento operacional para se conseguir a mudança de bases  $Q$  responsável por colocar uma dada equação dinâmica  $\langle A, B, C \rangle$  na forma do observador. É fácil perceber que

$$\begin{aligned} Q^{-1}A &= \tilde{A}Q^{-1} \\ C &= \tilde{C}Q^{-1} \end{aligned}$$

Transpondo as equações e chamando  $(Q^{-1})^T = P$  obtemos

$$\begin{aligned} A^T P &= P \tilde{A}^T \\ C^T &= P \tilde{C}^T \end{aligned}$$

Considerando as estruturas particulares desejadas para  $\tilde{A}$  e  $\tilde{C}$ , e sendo  $p^i$  a  $i$ -ésima coluna de  $P$ , chegamos ao seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} p^1 &= C^T \\ p^2 &= [A^T + a_{n-1}I] p^1 \\ p^3 &= [(A^T)^2 + a_{n-1}A^T + a_{n-2}I] p^1 \\ &\vdots \\ p^n &= [(A^T)^{n-1} + a_{n-1}(A^T)^{n-2} + \dots + a_1I] p^1 \end{aligned}$$

Com isto podemos formalizar um algoritmo de cálculo para colocar uma planta observável  $\langle A, B, C \rangle$  em uma base onde as matrizes  $\langle \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \rangle$  sejam como as mostradas no início desta seção.

### Algoritmo 3.5.1 — Forma Canônica do Observador

*Este algoritmo permite a escolha de uma matriz  $Q$  capaz de colocar as equações dinâmicas da planta na Forma Canônica do Observador. A planta deve ser observável e apresentar apenas uma variável de saída:  $r = 1$ .*

**Passo 1:** Calcular os vetores  $p^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  através da fórmula

$$\begin{aligned} p^i &= [(A^T)^{i-1} + a_{n-1}(A^T)^{i-2} + \dots + a_{n-i+1}I] p^1, \quad \forall i \geq 2 \\ p^1 &= C^T. \end{aligned}$$

**Passo 2:** Montar a matriz  $P = [p^1 \ p^2 \ \dots \ p^n]$

**Passo 3:** Obter  $Q = (P^T)^{-1}$

**Passo 4:** A forma canônica procurada é dada por  $\tilde{A} = Q^{-1}AQ$ ,  $\tilde{B} = Q^{-1}B$  e  $\tilde{C} = CQ$ .

### 3.5.2 Método #3 — Observador de ordem completa

Supomos inicialmente que as matrizes  $A$  e  $C$  da planta já se encontram na forma canônica do observador. Devemos então solucionar as RFO mais uma vez. Em primeiro lugar, como no caso #1, escolhemos  $T = I_n$ . Com isto,

(3.2) e (3.3) serão trivialmente satisfeitas pondo  $H = B$ ,  $M = I_n$  e  $N = 0$ . Falta ainda escolher  $J$  de modo a posicionar o espectro de  $G = A - JC$  em  $\mathbb{C}^-$ . Nesta etapa os efeitos simplificadores da forma canônica acima podem ser sentidos. Impondo para  $G$  um formato semelhante ao de  $A$ , teremos

$$G = \begin{bmatrix} -g_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -g_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -g_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -g_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Tendo  $G$  este formato, seus autovalores podem ser designados pela escolha apropriada dos  $g_i$ . Concluiríamos também que a matriz  $A - G$  tem todas as colunas nulas, exceto a primeira:

$$A - G = \begin{bmatrix} g_{n-1} - a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_{n-2} - a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ g_1 - a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_0 - a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Como devemos ter  $A - G = JC$ , e como  $CC^T = 1$ , podemos encontrar  $J$  a partir de

$$J = (A - G)C^T = \begin{bmatrix} g_{n-1} - a_{n-1} \\ g_{n-2} - a_{n-2} \\ \vdots \\ g_1 - a_1 \\ g_0 - a_0 \end{bmatrix}$$

O uso da forma canônica realmente simplificou os cálculos: a matriz  $J$  pode ser escolhida de maneira direta, bastando conhecer os coeficientes do polinômio característico da planta e os autovalores desejados para o estimador. Consideremos agora o caso geral de uma planta  $\mathcal{P}$  descrita por equações dinâmicas em uma base qualquer:

$$\mathcal{P} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

O primeiro passo é providenciar uma transformação de equivalência  $x = Q\tilde{x}$  de tal modo que as equações dinâmicas da planta na nova base,

$$\mathcal{P} \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) \end{cases}$$

apresentem matrizes  $\tilde{A}$  e  $\tilde{C}$  com as estruturas desejadas. O algoritmo descrito na seção anterior pode ser utilizado nesta etapa. A próxima tarefa é solucionar as relações fundamentais dos observadores da maneira mostrada acima, usando as matrizes  $\tilde{A}$  e  $\tilde{C}$ . Ou seja, escolhamos  $T = I_n$ ,  $H = \tilde{B}$ ,  $M = I_n$ ,  $N = 0$  e  $G$  com os autovalores desejados e com a mesma estrutura de  $\tilde{A}$ . A matriz  $J$  seria calculada a partir de

$$J = (\tilde{A} - G)\tilde{C}^T$$

É importante lembrar que ao conectar o observador  $\langle G, H, J, M, N \rangle$  aos sinais  $y$  e  $u$  da planta, a saída  $w = z$  será uma estimativa assintótica de  $\tilde{x}$  e não de  $x$ . Após multiplicá-la por  $Q$  obtemos a desejada aproximação para  $x$ .

### Algoritmo 3.5.2 — Construção de Observadores, método #3

*Este algoritmo permite a escolha de matrizes que satisfazem as RFO e a subsequente construção de observadores de ordem completa via uma mudança de bases que coloca a planta na Forma Canônica do Observador. A planta deve ser observável, possuir uma única variável de saída, e as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os dados iniciais, bem como os autovalores desejados para o estimador.*

**Passo 1:** Encontrar  $Q(n \times n)$  tal que  $\tilde{A} = Q^{-1}AQ$ ,  $\tilde{B} = Q^{-1}B$  e  $\tilde{C} = CQ$  estejam na forma canônica do observador (algoritmo 3.5.1).

**Passo 2:** Sendo  $\Delta_g(s) = s^n + g_{n-1}s^{n-1} + \dots + g_1$  o polinômio característico desejado para o estimador, construir a matriz  $G$  como em (3.5).

**Passo 3:** Calcular  $J = (\tilde{A} - G)\tilde{C}^T$ .

**Passo 4:** As matrizes  $T = I_n$ ,  $G$ ,  $H = B$ ,  $J$ ,  $M = I_n$  e  $N = 0$  satisfazem as RFO.

**Passo 5:** O estimador procurado é descrito por

$$\mathcal{O} \begin{cases} \dot{z}(t) = Gz(t) + Hu(t) + Jy(t) \\ w(t) = Mz(t) \end{cases}$$

Sua saída  $w(t) = z(t)$  é uma estimativa para  $\tilde{x}(t)$ . Para estimar  $x(t)$  devemos usar  $Qw(t)$ .

**Exemplo 3.5.1** *Seja a planta descrita por*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

*O polinômio característico de  $A$  é obtido por inspeção:*

$$s^3 - 3s^2 - 2s - 1$$

*Usando as fórmulas anteriores:*

$$p^1 = C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p^2 = [A^T + a_{n-1}I]p^1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p^3 = \dots = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*A obtenção de  $P$  é direta, e a de  $Q$  é simples:*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad Q = (P^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 11 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

*Após a mudança de bases teremos*

$$\tilde{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{B} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{C} = CQ = C$$

*Desejando rapidez de convergência caracterizada por autovalores localizados em  $-1$  teríamos  $\Delta_g(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$  e a matriz  $G$  seria*

$$G = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*O cálculo de  $J$  é suave:*

$$J = (\tilde{A} - G)\tilde{C}^T = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

*Como  $H = \tilde{B}$ ,  $T = M = I_3$  e  $N = 0$  o observador pode ser construído a partir da equação*

$$\dot{z}(t) = Gz(t) + Hu(t) + Jy(t)$$

*Deve-se sempre lembrar que  $z(t) = w(t)$  tende assintoticamente para o estado  $\tilde{x}(t)$ ; a estimativa para  $x(t)$  seria dada por  $Qw(t) = Qz(t)$ .*

### 3.5.3 Método #4 — Observador mínimo para $r = 1$

Como temos apenas uma variável de saída, a ordem dos estimadores mínimos será  $o = n - 1$ . Continuamos supondo que as equações dinâmicas da planta estão na forma canônica vista nas últimas seções. O primeiro passo será a escolha de  $G$  ( $n - 1 \times n - 1$ ) como abaixo, cuja dinâmica pode ser arbitrariamente imposta através dos  $g_i$ .

$$G = \begin{bmatrix} -g_{n-2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -g_{n-3} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -g_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -g_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Analisemos a equação (3.1). Dada a forma particular de  $C$ , as colunas de  $JC$  são todas nulas, com exceção da primeira, que é a própria  $J$ . Assim,  $T$  ( $n - 1 \times n$ ) deve ser escolhida de modo que as últimas colunas de  $TA - GT$  sejam nulas. Um raciocínio matricial muito simples mostraria que, se escolhêssemos  $T$  como Luenberger o fez em seus trabalhos pioneiros,

$$T = \begin{bmatrix} -g_{n-2} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -g_0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

conseguiríamos anular as últimas colunas de  $AT - GT$ . A tarefa de encontrar  $J$  e  $H$  fica então simplificada:

$$J = (TA - GT)C^T \quad H = TB$$

Nos métodos vistos anteriormente a matriz  $T$  era a primeira a ser escolhida, e sempre de uma maneira simples e óbvia. Agora, o pulo do gato está na escolha de  $T$ , um pequeno artifício que permite uma solução imediata de (3.1). Para terminar o projeto, consideremos (3.3); ela pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} N & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} = I$$

donde deduzimos que

$$\begin{bmatrix} N & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \\ -g_{n-2} & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \\ -g_0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

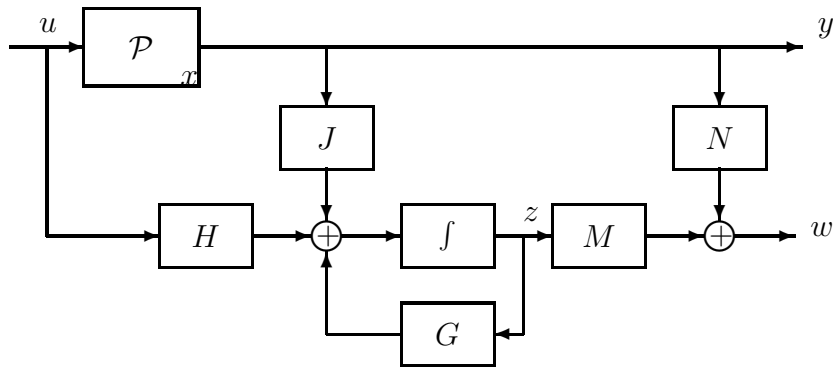
A inversa desta última matriz pode ser encontrada de maneira direta, dada a sua particular estrutura. Isto levaria a

$$\begin{bmatrix} N & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \\ g_{n-2} & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \\ g_0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

donde concluimos que

$$N = \begin{bmatrix} 1 \\ g_{n-2} \\ \vdots \\ g_0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-1} \end{bmatrix}$$

O diagrama abaixo ilustra as conexões a serem feitas para efetivamente implementar o estimador



**Exemplo 3.5.2** *Seja a planta, descrita, já na base apropriada, por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

*Supondo que desejamos estimar os estados com um espectro dado pelos autovalores  $\{-1, -1\}$  isto significa que desejamos a matriz  $G$  com o polinômio característico:*

$$(s + 1)^2 = s^2 + 2s + 1$$

*Deste ponto obtemos trivialmente  $G$  e, adicionando-lhe uma coluna extra, temos  $T$ :*



$$G = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular

$$TA - GT = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A primeira coluna desta matriz fornece  $J$ ; a obtenção de  $H$  também é direta, levando a:

$$J = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad H = TB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As matrizes  $M$  e  $N$  podem ser encontradas fazendo

$$\begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de onde facilmente identificamos

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quando as matrizes da planta não se encontram inicialmente na forma canônica apropriada, devemos providenciar uma mudança de bases. A sistemática precedente seria aplicada às matrizes  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$ , e a saída  $w(t)$  do estimador tenderia ao estado  $\tilde{x}(t)$ . Para estimar  $x(t)$  devemos premultiplicar  $w(t)$  por  $Q$ . Podemos sintetizar este método #4 através do

### Algoritmo 3.5.3 — Observadores mínimos, método #4

Este algoritmo permite a escolha de matrizes que satisfazem as RFO e a subsequente construção de observadores mínimos via uma mudança de bases que coloca a planta na Forma Canônica do Observador. A planta deve ser observável possuir um única variável de saída, e as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os dados iniciais, bem como os autovalores desejados para o estimador.

**Passo 1:** Encontrar  $Q(n \times n)$  tal que  $\tilde{A} = Q^{-1}AQ$ ,  $\tilde{B} = Q^{-1}B$  e  $\tilde{C} = CQ$  estejam na forma canônica do observador (algoritmo 3.5.1).

**Passo 2:** Sendo  $\Delta_g(s) = s^{n-1} + g_{n-2}s^{n-2} + \dots + g_1$  o polinômio característico desejado para o estimador, construir a matriz  $G$  ( $n-1 \times n-1$ ) com o formato de (3.5).

**Passo 3:** Obter  $T$  ( $n-1 \times n$ ), adicionando a  $G$  uma coluna extra  $v$  composta de zeros e de um único elemento unitário na última linha:  $T = [G:v]$ .

**Passo 4:** Calcular  $J = (T\tilde{A} - GT)\tilde{C}^T$ .

**Passo 5:** Calcular  $\begin{bmatrix} \tilde{C} \\ T \end{bmatrix}^{-1}$

**Passo 6:**  $N$  é a primeira coluna desta matriz, e  $M$  é formada pelas  $n-1$  últimas colunas

**Passo 7:** As matrizes  $T$ ,  $G$ ,  $H = TB$ ,  $J$ ,  $M$  e  $N$  satisfazem as RFO.

**Passo 8:** O estimador procurado é descrito por

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= Gz(t) + Hu(t) + Jy(t) \\ w(t) &= Mz(t) + Ny(t)\end{aligned}$$

Sua saída  $w(t)$  é uma estimativa para  $\tilde{x}(t)$ . Para estimar  $x(t)$  devemos usar  $Qw(t)$ .

## 3.6 Observador Mínimo para o Caso Geral

$$r > 1$$

Suporemos que  $C$  tem posto  $r$ . Esta hipótese é muito razoável; se por acaso ela for falsa, isto significa que algumas dentre as  $r$  variáveis de saída  $y$  são linearmente dependentes das outras e poderiam ser desprezadas. Feito o que obteríamos uma nova matriz  $C$  com menos linhas e sem redundâncias. Seja então a planta representada por  $\langle A, B, C \rangle$ , com  $\text{posto}(C) = r$ . Seria trivial encontrar uma matriz  $Q$  tal que

$$CQ = [I_r \ 0]$$

Fazendo a mudança de bases encontraríamos

$$\tilde{A} = Q^{-1}AQ \quad \tilde{B} = Q^{-1}B \quad \tilde{C} = CQ = [I_r \ 0]$$

Para todos os efeitos, estas são as matrizes que descrevem a planta: as  $r$  primeiras variáveis de estado são idênticas às variáveis de saída. Fica claro

que o observador deverá estimar apenas as  $n - r$  variáveis restantes. A partir de agora suporemos que a planta, em sua base original, já apresenta esta característica; ou seja, não é necessário encontrar  $Q$  tal que  $CQ = [I_r \ 0]$ :

$$\mathcal{P} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) = [I_r \ 0] \end{cases}$$

Chamemos as  $r - 1$  primeiras componente do vetor  $x$  de  $x^p$  e as  $n - r + 1$  últimas de  $x^u$ :

$$x = \begin{bmatrix} x^p \\ x^u \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad x^p = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{r-1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x^u = \begin{bmatrix} x_r \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Com isto induzimos partições em  $A, B$  e  $C$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}^p \\ \dot{x}^u \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^p \\ x^u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} y^p \\ y_r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{r-1} \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & 0 \dots 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

Escrevendo as equações correspondentes a cada partição:

$$\text{Partição } p: \begin{cases} \dot{x}^p = A_{11}x^p + A_{12}x^u + B_1u \\ y^p = x^p \end{cases}$$

$$\text{Partição } u: \begin{cases} \dot{x}^u = A_{22}x^u + A_{21}x^p + B_2u \\ y_r = [1 \ 0 \ \dots \ 0]x^u \end{cases}$$

O vetor  $x^p$  é totalmente mensurável, portanto o problema de estimar  $x$  fica restrito ao problema de estimar  $x^u$ . Como  $x^p = y^p$  é mensurável, a segunda das equações acima pode ser reescrita:

$$\begin{cases} \dot{x}^u = A_{22}x^u + B_2^e u^e \\ y_r = [1 \ 0 \ \dots \ 0]x^u = cx^u \end{cases}$$

onde  $B_2^e = [B_2 \ A_{21}]$ ,  $c = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$  e o sinal

$$u^e = \begin{bmatrix} u \\ y^p \end{bmatrix}$$

é totalmente mensurável. O sistema  $\langle A_{22}, B_2^e, c \rangle$  tem ordem  $n - r + 1$ , uma única saída, e é observável, caso contrário o sistema original também não o seria. Podemos construir para ele um observador mínimo de ordem  $(n - r + 1) - 1 = n - r$ . Com isto estaremos estimando todo o estado  $x$ , como era desejado, e com uma dinâmica adicional de ordem apenas  $n - r$ .

### 3.7 Exercícios

1. Considere a planta descrita pelas equações dinâmicas

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u; \quad y = [1 \ 0]x$$

Para ela, construa um observador com autovalores em  $\{-1, -2\}$

- 2.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad y = [1 \ 0 \ 0]x$$

- (a) Projetar um observador com autovalores em  $\{-1, -1, -1\}$ . Fornecer as equações e o diagrama de blocos.
- (b) idem (a) com autovalores em  $\{-1, -1\}$ .

3. Seja um SLIT monovariável com função de transferência

$$g_a(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 - 3s^2 + 3s - 1}$$

Sabendo que apenas sua saída é mensurável, projetar uma lei de controle (equações e diagrama de blocos) que acarrete uma função de transferência de malha fechada  $g_f(s) = 1/(s + 1)$ . Repetir a dose para  $g_f(s) = 1$  e  $g_f(s) = 0$ .

4. Para um sistema  $\langle A, B, C \rangle$  com entrada  $u$  e saída  $y$  construiu-se um observador  $\langle G, H, J, M, N \rangle$ . Provar que o estado  $z$  do observador é incontrolável por  $u$  e inobservável por  $y$ .

- 5.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

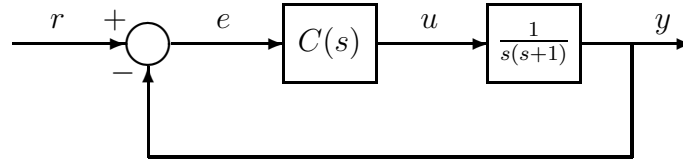
O sistema acima encontra-se em uma forma bastante particular que permite o projeto rápido e simples de um observador mínimo. Encontre um com pólos em  $\{-1, -1\}$ .

6.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Encontre uma transformação de equivalência  $x = Q\tilde{x}$  que coloque o sistema acima em uma forma onde se possa aplicar a técnica do exercício anterior para se obter um observador mínimo. E, já que estamos por aqui mesmo, obtenha-o, com pólos em  $\{-1, -1\}$ .

7.

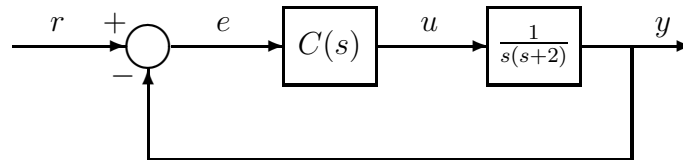


Encontre, se possível, um compensador  $C(s)$  que coloque todos os pólos do sistema em  $-2$ . Sugestão: implemente uma realimentação de estados via observador ou compensador dinâmico e veja se é possível escrever a solução obtida no formato acima.

8. Para a matriz abaixo,  $m(s) = (s+1)(s+2)(s-3)$ :

$$G(s) = \frac{1}{m(s)} \begin{bmatrix} (s-3)(2s+3) & (s+2)(s-3) \\ 2s^2 - 2s - 7 & (s+2)(2s-1) \end{bmatrix}$$

- Encontre um compensador estático que posiciona os pólos da malha fechada em  $\{-1, -2, -3\}$ .
  - Implemente a lei acima por meio de um observador com pólo em  $-1$ . Apresente diagrama completo.
  - idem (b) com compensador dinâmico mínimo.
9. Encontre um compensador capaz de fazer com que o sistema abaixo tenha como espectro  $\lambda = \{-2, -1 \pm j\}$



10.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{(s-1)(s+2)} & \frac{s^2 - \alpha s - 2}{(s^2 - 1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

- (a) Achar uma realização e dizer a ordem das realizações mínimas.
- (b) Para que valores do parâmetro  $\alpha$  é possível reduzir a ordem da realização encontrada? Que acontecerá com o modo desaparecido?
- (c) Usando o valor obtido acima para  $\alpha$  desacoplar o sistema.

# Capítulo 4

## Compensadores

### 4.1 Na frequência

Mostrar a versão frequencial dos observadores

### 4.2 Compensadores

Algo bem geral colocando Pearson, Youla, etc Acho que precisa um capítulo todo

### 4.3 Filtros

Relacionar com o problema de filtragem