

# Sumário

<b>1</b>	<b>Sistemas, Sinais e Controle</b>	<b>1</b>
1.1	Exemplos e Classificações . . . . .	1
1.2	Análise e Síntese . . . . .	2
1.3	Modelo Matemático . . . . .	2
1.3.1	Sistemas Contínuos a Parâmetros Concentrados . . . . .	2
1.3.2	Sistemas Lineares . . . . .	2
1.3.3	Sistemas Lineares Fixos . . . . .	3
1.4	SLITs e EDOLFs . . . . .	3
1.5	Transformada de Laplace . . . . .	4
1.5.1	Exemplos . . . . .	4
1.5.2	Propriedades . . . . .	4
1.5.3	Laplace e as EDOLFs . . . . .	5
1.5.4	Métodos Matriciais e Simulações Numéricas . . . . .	5
1.6	Teorema Geral dos SLITS . . . . .	6
1.6.1	SLITs Relaxados . . . . .	6
1.6.2	Em resumo ... . . . .	6
1.7	Obtenção de Modelos Matemáticos . . . . .	7
1.7.1	Elementos mecânicos ideais . . . . .	7
1.7.2	Elementos elétricos ideais . . . . .	8
1.7.3	Pêndulo Simples . . . . .	9
1.7.4	Que fazer? . . . . .	10
1.8	Linearização de funções . . . . .	11
1.9	Linearização de EDOs . . . . .	11
1.10	Métodos de Identificação . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Uso de Variáveis Auxiliares</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>Sistemas Não Relaxados: Noção de Estado</b>	<b>20</b>
3.1	Equações Dinâmicas e Espaço de Estados . . . . .	22
3.2	Variáveis de Estado e Interpretação Energética . . . . .	24
3.3	Como Fica o Caso Linear . . . . .	26

3.4	Como Fica o Caso Não-Linear . . . . .	29
3.5	Descrições Externas e Internas . . . . .	30
3.6	Breves notas sobre sistemas discretos . . . . .	34
3.6.1	Seqüências . . . . .	34
3.6.2	Sistemas Discretos: conceitos básicos . . . . .	36
3.6.3	Equações a diferenças . . . . .	41
3.6.4	Matriz de transferência discreta . . . . .	43
3.6.5	Equações Dinâmicas Discretas . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Resolução de Equações Dinâmicas</b>	<b>47</b>
4.1	Resposta à Entrada Nula de Sistemas Lineares . . . . .	48
4.2	Resposta ao Estado Zero de Sistemas Lineares . . . . .	53
4.3	Resposta Geral de Sistemas Lineares . . . . .	55
4.4	Caso Linear e Invariante no Tempo . . . . .	56
4.5	Equações Dinâmicas Equivalentes . . . . .	61
4.6	Equações Dinâmicas Para Sistemas Físicos . . . . .	68
4.7	Aspectos Matemáticos . . . . .	70
4.7.1	Equações Homogêneas . . . . .	73
4.7.2	Aspectos freqüenciais . . . . .	80
4.7.3	Forma de Jordan . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Controlabilidade e Observabilidade</b>	<b>82</b>
<b>6</b>	<b>Realimentação de Estados e Síntese via Observadores</b>	<b>83</b>

# Capítulo 1

## Sistemas, Sinais e Controle

Usaremos apenas idéias intuitivas: considere uma porção do meio ambiente que com ele troca informações e/ou energias. A porção isolada do meio ambiente na qual concentramos a atenção é o sistema, e as informações (ou energias trocadas no caso de sistemas físicos) são os sinais.

### 1.1 Exemplos e Classificações

Consideramos em primeiro lugar um motor elétrico DC acionando uma carga. A entrada para este sistema pode ser facilmente identificada: a tensão elétrica aplicada aos terminais do motor. É bastante razoável designar como saída a velocidade angular da carga, e com pouco esforço podemos ter uma idéia qualitativa do funcionamento deste sistema. Supondo que aplicamos uma entrada (tensão) constante a partir de um dado instante a saída deixará seu valor inicial (vamos supor que seja 0, a carga estava em repouso) acelerará gradualmente até atingir uma velocidade constante.

O segundo exemplo é o de um pequeno corpo metálico que pode se mover sem atrito em um plano horizontal, próximo de um campo magnético cuja intensidade pode ser alterada com facilidade. Isto pode ser obtido por meio de um eletroímã.

O terceiro exemplo é o de uma caldeira, um dispositivo para gerar vapor. E por fim seja uma conta de poupança em uma instituição financeira.

O estudo destes exemplos ajuda a entender como se pode classificar sistemas. A primeira possível escolha é entre sistemas **Contínuos** ou **discretos**. Mas também podemos dividir os sistemas entre **Determinísticos** ou **estocásticos**. A parâmetros **concentrados** (grandezas dependem apenas do tempo) ou a parâmetros **distribuídos** (grandezas podem depender, além do tempo, de outras variáveis). Ou ainda em **Multivariáveis** ou **mono-**

variáveis.

## 1.2 Análise e Síntese

Conforme já deve ter dado para perceber, o conceito de sistemas apresentado acima é muito vasto e geral, permitindo que praticamente qualquer fenômeno ou situação possam ser englobados por ele.

Desta maneira, estudar sistemas é estudar a realidade, com a finalidade de

1. aceitá-la (postura passiva): **Análise**
2. ou mudá-la (postura ativa): **Síntese, Controle.**

A ênfase básica de Controle é o desejo de mudar, afetar, influir, impor vontades. Isto é geral (e talvez inconsciente) na humanidade. Para controlar é preciso conhecer, ou seja, a Análise é necessária para a Síntese.

## 1.3 Modelo Matemático

Ferramentas matemáticas que permitem “entender” um sistema, e consequentemente “prever” seu comportamento. Dado o modelo matemático de um sistema é possível calcular sua saída, desde que se conheça a entrada. O modelo matemático por excelência para sistemas contínuos são as equações diferenciais.

### 1.3.1 Sistemas Contínuos a Parâmetros Concentrados

Admitem como modelo matemático equações diferenciais ordinárias (EDOs) da forma abaixo, onde  $m \leq n$ .

$$y^{(n)}(t) = f(y^{(n-1)}(t), \dots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \dots, \dot{u}(t), u(t), t)$$

Sistemas a parâmetros distribuídos são modelados por equações diferenciais parciais.

### 1.3.2 Sistemas Lineares

Descritos por equações diferenciais ordinárias lineares, EDOLs. São equações da forma acima onde  $f$  é linear, ou seja,  $y^{(n)}(t)$  é uma combinação linear de

$y$  e de suas derivadas, e de  $u$  e suas derivadas:

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) = & \alpha_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_1(t)\dot{y}(t) + \alpha_0(t)y(t) + \\ & \beta_m(t)u^{(m)}(t) + \cdots + \beta_1(t)\dot{u}(t) + \beta_0(t)u(t) \end{aligned}$$

onde  $m \leq n$ .

### 1.3.3 Sistemas Lineares Fixos

ou invariantes no tempo, são descritos por equações diferenciais ordinárias lineares fixas, EDOLFs. São equações como as acima, onde a função  $f$  é linear e “independente do tempo  $t$ ”. Isto significa que os coeficientes da combinação linear são constantes:

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) = & \alpha_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_1\dot{y}(t) + \alpha_0y(t) + \\ & \beta_mu^{(m)}(t) + \cdots + \beta_1\dot{u}(t) + \beta_0u(t) \end{aligned}$$

onde  $m \leq n$  e os  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  são constantes reais. As EDOLFs são normalmente escritas de modo diverso:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_mu^{(m)}(t) + \cdots + b_1\dot{u}(t) + b_0u(t)$$

onde  $m \leq n$ ,  $a_i = -\alpha_i$  e  $b_i = -\beta_i$ .

Os sistemas lineares fixos, ou invariantes no tempo, são geralmente designados pela sigla SLIT.

## 1.4 SLITs e EDOLFs

A natureza é não linear, isto é um fato. Assim, o conceito de sistemas lineares teria apenas interesse teórico e matemático. Por sorte, vários sistemas importantes do mundo real tem comportamentos que podem ser muito bem aproximados por modelos lineares, em especial os modelos lineares e fixos, o que justifica o seu estudo.

Para resolver as EDOLFs podemos usar

1. Método tradicional, onde se deve somar duas parcelas, a solução geral da equação homogênea associada e uma solução particular da equação completa:  $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ .
2. Transformadas de Laplace.
3. Métodos matriciais ou “modernos”.
4. Simulações numéricas.

## 1.5 Transformada de Laplace

O método tradicional é cansativo, entediante e artificioso. As transformadas de Laplace são uma ferramenta muito poderosa, e o seu uso simplifica muito a tarefa de solucionar as EDOLFs. Sempre que possível deve-se empregá-las.

A transformada de Laplace associa a cada função real da variável real e contínua  $t$  uma função complexa da variável complexa  $s$ , por meio da expressão:

$$f(t) \mapsto \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau$$

### 1.5.1 Exemplos

- Degrau unitário:  $f(t) = 1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-s\tau} d\tau = \left[ -\frac{e^{-s\tau}}{s} \right]_{0^-}^{\infty} = -\frac{1}{s} [e^{-s\tau}]_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s}$$

- Rampa unitária:  $f(t) = t \cdot 1(t) \implies F(s) = \dots = 1/s^2$
- Exponencial:  $f(t) = e^{at} \cdot 1(t) \implies F(s) = \dots = 1/(s-a)$
- Impulso unitário:  $f(t) = \delta(t) \implies F(s) = \dots = 1$

### 1.5.2 Propriedades

- Linearidade:  $\forall a_i \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{L}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots + a_n f_n(t)\} = a_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \dots + a_n \mathcal{L}\{f_n(t)\}$$

- Derivação real:  $\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(0^-)$
- Integração real:  $\mathcal{L}\left\{\int f(t)\right\} = \frac{1}{s}F(s)$
- Teorema do valor inicial:  $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
- Teorema do valor final (cuidado!):  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

### 1.5.3 Laplace e as EDOLFs

Seja, por exemplo, a equação diferencial a seguir com suas condições iniciais:

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + 3\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t) \\ y(0^-) = 1; \quad \dot{y}(0^-) = 2; \quad \ddot{y}(0^-) = 3 \end{cases}$$

Achando as transformadas de Laplace de ambos os membros, e usando as propriedades, vem

$$\begin{aligned} s^3 Y(s) - s^2 y(0^-) - s \dot{y}(0^-) - \ddot{y}(0^-) \\ + 3(s^2 Y(s) - s y(0^-) - \dot{y}(0^-)) \\ + 3(s Y(s) - y(0^-)) + Y(s) = \\ s U(s) - u(0^-) + 2U(s) \end{aligned}$$

Agrupando melhor, e substituindo os valores das CIs:

$$(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)Y(s) - (s^2 + 3s + 3) - 2(s + 3) - 3 = (s + 2)U(s) - u(0^-)$$

Isolando  $Y(s)$ :

$$\begin{aligned} (s^3 + 3s^2 + 3s + 1)Y(s) &= (s + 2)U(s) + (s^2 + 5s + 12) - u(0^-) \\ &= F(s) \end{aligned}$$

donde podemos exprimir  $Y(s)$  como

$$Y(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} F(s)$$

onde  $F(s)$  engloba termos conhecidos que dependem da função forçante  $u(t)$  e das condições iniciais. Deste modo  $Y(s)$  está plenamente determinada e pode-se encontrar a solução desejada  $y(t)$  a partir dela.

Estes desenvolvimentos ajudarão a aceitar a validade dos resultados apresentados na seção 1.6.

### 1.5.4 Métodos Matriciais e Simulações Numéricas

Os métodos “modernos” transformam a resolução de equações diferenciais como as que nos interessam em problemas de Cálculo Matricial. Como há um número grande de algoritmos numéricos eficientes, bem estudados e acessíveis para estes problemas explica-se a popularidade destes métodos.

Já os métodos de simulação numérica podem — e devem! — ser utilizados quando a aplicação de qualquer um dos outros é difícil ou mesmo impossível. Estes métodos são capazes de encarar qualquer equação, independentemente de tamanho ou complexidade (até mesmo casos variantes no tempo ou não lineares). Mas o preço a se pagar por este poder é que estas simulações fornecem apenas o gráfico da solução procurada, sendo incapazes de chegar à solução analítica.

## 1.6 Teorema Geral dos SLITS

Dado um SLIT com entrada  $u$  e saída  $y$  é sempre possível escrever

$$Y(s) = G(s)U(s) + G_i(s)$$

onde  $Y(s)$  é a transformada de Laplace da saída  $y(t)$ ,  $U(s)$  é a transformada de Laplace da entrada  $u(t)$ ,  $G(s)$  é uma função da variável complexa  $s$  determinada a partir dos coeficientes da equação diferencial e  $G_i(s)$  é uma função da variável complexa  $s$  determinada a partir do conhecimento da função forçante e das condições iniciais. Dá-se a  $G(s)$  o nome de **Função de Transferência** do sistema.

### 1.6.1 SLITs Relaxados

Diz-se que um sistema é relaxado quando as condições iniciais de sua equação diferencial são nulas; em termos físicos isto significa que não há energias inicialmente armazenadas no sistema. A partir do resultado acima vemos que, dado um SLIT relaxado, (CIs = 0) com entrada  $u$  e saída  $y$  é sempre possível escrever

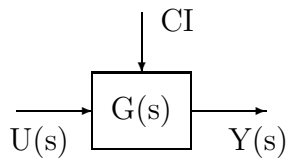
$$Y(s) = G(s)U(s)$$

onde  $G(s)$  é a **Função de Transferência** do SLIT. Esta expressão fornece um meio simples, direto e denso de representar SLITs. As funções de transferência caracterizam os SLITs de maneira elegante e concisa, são um modelo matemático muito usado.

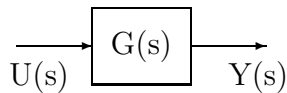
### 1.6.2 Em resumo ...

Havendo ou não CIs, a função de transferência  $G(s)$  caracteriza muito bem os SLITs, e será sempre associada a eles. Os diagramas de blocos fornecem uma notação cômoda:





$$Y(s) = G(s)U(s) + G_i(s)$$



$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Dado um SLIT, se a sua função de transferência  $G(s)$  for conhecida, o problema de Análise está bem encaminhado: basta encontrar  $Y(s) = G(s)U(s) + G_i(s)$  e pronto. A parte mecânica dos cálculos pode ser feita à mão ou usando recursos computacionais.

## 1.7 Obtenção de Modelos Matemáticos

Para sistemas físicos em geral:

Sistema real  $\longrightarrow$  Leis da Física  $\longrightarrow$  Modelo Matemático: ED

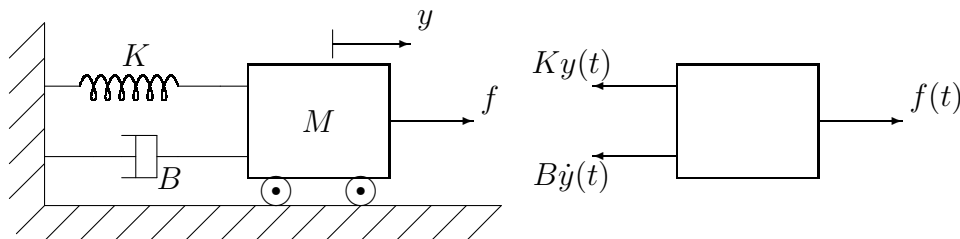
É comum supor parâmetros concentrados, e neste caso a ED vira EDO (quando não der, paciência). Muitas vezes, além da hipótese de parâmetros concentrados, usamos outras hipóteses suaves cujo resultado é:

EDO  $\longrightarrow$  EDOLF  $\longrightarrow G(s) \longrightarrow$  beleza!

Para ilustrar estas idéias, o que usaremos? Exemplos, lógico!

### 1.7.1 Elementos mecânicos ideais

Para o sistema esquematizado na figura abaixo à esquerda, supomos que a mola e o amortecedor viscoso são ideais e que há apenas movimentos de translação horizontais. Considerando a força  $f$  aplicada ao carrinho de massa  $M$  como entrada do sistema, e como saída a abscissa  $y(t)$ , determine o modelo matemático relacionando estas grandezas.



Na figura da direita esboçamos o diagrama de corpo livre para a situação: em um instante genérico  $t$  representamos as forças que agem sobre o corpo. As forças verticais (o peso  $Mg$  e a reação do apoio) se equilibram (não há movimentos na direção vertical) e, portanto, foram omitidas. Supondo que em  $t$  o deslocamento do carrinho é para a direita ( $y(t) > 0$ ) a mola reage aplicando uma força de intensidade  $Ky(t)$  no sentido indicado; se nesse mesmo instante a velocidade do carrinho é da esquerda para a direita o amortecedor reage aplicando uma força de intensidade  $B\dot{y}(t)$  no sentido indicado. Os leitores são convidados a mostrar que o resultado final permanece o mesmo ao se supor sentidos opostos para a posição e a velocidade.

Determinadas as forças basta usar as leis básicas da Dinâmica que relacionam a resultante das forças externas aplicadas à aceleração do centro de massa do corpo; como, por hipótese, não há rotação, a aceleração  $\gamma$  será dada pela segunda derivada da posição linear  $y$ . Para somar as forças supomos positivo o sentido da esquerda para a direita; o resultado final é:

$$\sum f = M\gamma \quad \implies \quad f(t) - Ky(t) - B\dot{y}(t) = M\ddot{y}(t)$$

Esta expressão, consequência direta das leis de Newton, pode ser reescrita em um formato mais apropriado:

$$M\ddot{y}(t) + Ky(t) + B\dot{y}(t) = f(t)$$

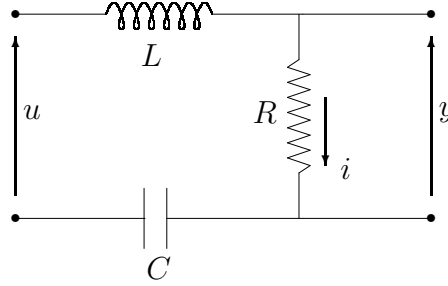
Dividindo os termos por  $M$  chegamos a

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + \frac{B}{M}\dot{y}(t) + \frac{C}{M}y(t) = \frac{1}{M}f(t) \\ y(0^-) = y_0; \quad \dot{y}(0^-) = v_0 \end{cases}$$

e este é o formato clássico das EDLOFs. Notar que as condições iniciais são a posição e a velocidade em  $t = 0$ .

### 1.7.2 Elementos elétricos ideais

No circuito esquematizado abaixo o indutor, o capacitor e o resistor podem ser considerados ideais; a entrada e a saída do sistema são as tensões  $u$  e  $y$  indicadas abaixo, e a corrente que atravessa os componentes é  $i$ . Pede-se o modelo matemático.



Da teoria básica de circuitos sabe-se que, em um instante qualquer  $t$  a tensão  $u(t)$  pode ser escrita como

$$u(t) = v_L(t) + v_R(t) + v_C(t)$$

onde a tensão  $v_L(t)$  no indutor é diretamente proporcional à derivada da corrente que o atravessa, a tensão  $v_R(t)$  no resistor (que é a própria saída  $y(t)$  do sistema) é diretamente proporcional à corrente e a tensão  $v_C(t)$  no capacitor é diretamente proporcional à integral da corrente. Com isto:

$$u(t) = L \frac{d}{dt} i(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

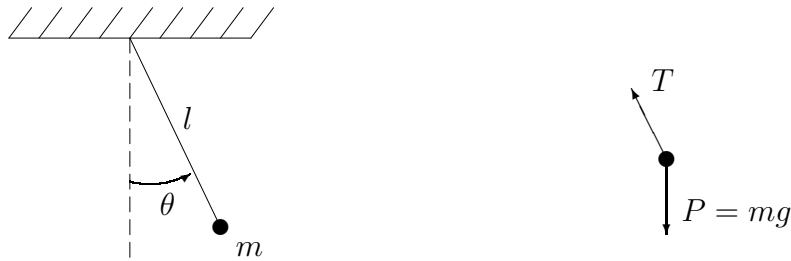
Lembrando que  $y(t) = v_R(t) = Ri(t)$  podemos eliminar a corrente desta expressão; feito isto derivaríamos uma vez com relação ao tempo e reagruparíamos para obter uma equação diferencial pura:

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + \frac{R}{L}\dot{y}(t) + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{R}{L}\dot{u}(t) \\ y(0^-) = \alpha; \quad \dot{y}(0^-) = \beta \end{cases}$$

Mais uma vez o modelo encontrado é linear e invariante no tempo. As hipóteses de elementos ideais são, novamente, as responsáveis por isto.

### 1.7.3 Pêndulo Simples

O pêndulo simples esquematizado na figura a seguir possui massa  $m$ , está atado por um cordão de massa desprezível e comprimento  $l$  e oscila em um único plano, o plano do papel. O ângulo medido a partir da vertical que passa pelo ponto de suspensão é  $\theta$ . Pede-se o modelo matemático, claro!



Na figura da direita temos o diagrama de corpo livre para a situação, mostrando as forças que agem sobre o corpo. Para casos como este é útil considerar o pêndulo como um corpo rígido e tomar os momentos das forças com relação ao centro de suspensão: isto anula a contribuição da força  $T$ , a tensão no fio. A equação básica da mecânica rotacional diz que a somatória dos momentos das forças externas em relação a um certo ponto é igual ao momento de inércia do corpo vezes a sua aceleração angular.

Para o nosso problema o único momento a se considerar é o causado pelo peso:  $M = -Pd$ , onde o braço de alavanca é dado por  $d = l \sin \theta$  (este momento é negativo porque tende a girar a massa no sentido oposto ao arbitrado como positivo para os deslocamentos angulares); o momento de inércia vale  $ml^2$  e a aceleração angular é a derivada segunda da posição angular, donde

$$-Pl \sin \theta(t) = ml^2 \ddot{\theta}(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{l}{g} \sin \theta(t) = 0$$

Esta não é uma equação diferencial linear, apesar de todas as idealizações costumeiras tais como fio inextensível, ausência de atritos, massas pontuais, etc.

#### 1.7.4 Que fazer?

A EDO não é linear. Mesmo usando elementos ideais o modelo encontrado não é linear. Ou aceitamos e trabalhamos com ele assim mesmo (há softs para isso) ou linearizamos.

Muitas vezes a linearização é conseguida aplicando regras conhecidas de simplificação, como por exemplo:  $\sin(t) \approx t$  desde que  $t \approx 0$ . Mas há uma teoria geral.

## 1.8 Linearização de funções

Considere uma função real de variável real representada por  $y = f(x)$ . Supondo que a variável independente  $x$  permanece sempre próxima de um valor  $x_0$ , a variável  $y$  permanecerá sempre próxima de  $y_0 = f(x_0)$ . Dizemos que a função “trabalha” nas vizinhanças do **Ponto de Operação** caracterizado por  $(x_0, y_0)$ . Aplicando a expansão em série de Taylor para estas condições temos:

$$y = f(x) = f(x_0) + \left[ \frac{df}{dx} \right]_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left[ \frac{d^2 f}{dx^2} \right]_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

Supondo agora que a função realmente trabalha perto do PO (ponto de operação) podemos desprezar os termos de ordens superiores a 2 na expansão acima para obter

$$y \approx f(x_0) + \left[ \frac{df}{dx} \right]_{x=x_0} (x - x_0)$$

ou ainda

$$y - y_0 \approx m(x - x_0)$$

onde  $m$  é o valor da derivada de  $f$  calculada no ponto de operação. Chamando  $Y = y - y_0$  e  $X = x - x_0$  dizemos que a expressão  $Y = mX$  é uma aproximação linear para a função  $f$ , nas vizinhanças do ponto de operação  $(x_0, y_0)$ . Em termos geométricos, a equação  $y = y_0 + m(x - x_0)$  representa a tangente à curva  $y = f(x)$  no ponto de operação.

## 1.9 Linearização de EDOs

Antes disso precisamos linearizar funções de várias variáveis. Seja por exemplo  $y = f(a, b, c)$  e o ponto de operação definido por  $a = a_0$ ,  $b = b_0$  e  $c = c_0$ . A série de Taylor será

$$\begin{aligned} y &= f(a, b, c) \\ &= f(a_0, b_0, c_0) + \left[ \frac{\partial f}{\partial a} \right]_{PO} (a - a_0) + \left[ \frac{\partial f}{\partial b} \right]_{PO} (b - b_0) + \left[ \frac{\partial f}{\partial c} \right]_{PO} (c - c_0) \\ &\quad + \text{termos de ordem superior} \end{aligned}$$

onde as derivadas parciais são calculadas no ponto de operação PO. Supondo que tudo acontece nas proximidades do PO poderemos desprezar os termos superiores e obter

$$y = f(a_0, b_0, c_0) + \left[ \frac{\partial f}{\partial a} \right]_{PO} (a - a_0) + \left[ \frac{\partial f}{\partial b} \right]_{PO} (b - b_0) + \left[ \frac{\partial f}{\partial c} \right]_{PO} (c - c_0)$$

ou ainda

$$y - y_0 = \left[ \frac{\partial f}{\partial a} \right]_{PO} (a - a_0) + \left[ \frac{\partial f}{\partial b} \right]_{PO} (b - b_0) + \left[ \frac{\partial f}{\partial c} \right]_{PO} (c - c_0)$$

que é a equação do plano tangente à superfície definida pela função  $f$  no ponto de operação e também uma aproximação linear para a função.

Para linearizarmos uma EDO basta lembrar o seu formato geral:

$$y^{(n)}(t) = f(y^{(n-1)}(t), \dots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \dots, \dot{u}(t), u(t), t)$$

onde  $m \leq n$ . Se houver a garantia que  $u(t)$  e suas derivadas (até a ordem  $m$ ) e  $y(t)$  e suas derivadas (até a ordem  $n-1$ ) permanecem sempre na vizinhança de determinados valores, podemos usar os resultados precedentes e encontrar uma EDOLF que será uma aproximação para a EDO dada. Quanto mais próximas do PO se mantiverem as funções melhor será a aproximação.

## 1.10 Métodos de Identificação

Quando não for possível aplicar as Leis da Física para encontrar o modelo matemático.

## Capítulo 2

### Uso de Variáveis Auxiliares

Ao lado do método tradicional e do das transformadas de Laplace, ainda há uma maneira de se resolver EDLOFs que se revelará especialmente importante. Ilustrando-o por meio de exemplos, seja

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \\ y(0^-) = \alpha ; \quad \dot{y}(0^-) = \beta \end{cases}$$

Vamos definir o seguinte conjunto de variáveis auxiliares:

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \end{cases}$$

Operações diretas e elementares com estas novas variáveis e com a equação original fornecem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = u(t) - y(t) - 2\dot{y}(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

Estas relações podem ser escritas de uma forma mais compacta, desde que consideremos o seguinte vetor:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Com isto teremos

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) ; \quad x(0^-) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = x_0 \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

Chamando as matrizes acima de  $A$ ,  $B$  e  $C$  teremos

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) ; & x(0^-) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

O uso das variáveis auxiliares permitiu que se transformasse a equação diferencial em uma outra de primeira ordem e matricial. Isto acontecerá sempre, qualquer que seja a ordem da equação diferencial dada. Métodos para resolver uma equação nessa forma particular, bem como as vantagens dela decorrentes, serão vistos mais tarde. Basta, por enquanto, saber que é possível transformar uma EDLOF, através das variáveis auxiliares, até atingir a citada estrutura.

É interessante notar que este procedimento não requer condições iniciais nulas. Outro exemplo, a partir do qual mudaremos a notação: ao invés do rigoroso  $(0^-)$  passamos ao simplificado  $(0)$

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + 3\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \\ y(0) = \alpha ; \quad \dot{y}(0) = \beta ; \quad \ddot{y}(0) = \gamma \end{cases}$$

A escolha mais natural das variáveis auxiliares é:

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \\ x_3(t) = \ddot{y}(t) \end{cases}$$

que nos fornece, com algebrismos triviais:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = \dddot{y}(t) = u(t) - y(t) - 3\dot{y}(t) - 3\ddot{y}(t) \\ \quad = -x_1(t) - 3x_2(t) - 3x_3(t) + u(t) \end{cases}$$

Colocando

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$



teremos

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t); & x(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = x_0 \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

Mais uma vez transformamos uma equação diferencial de ordem elevada em uma equação diferencial matricial de primeira ordem. Rebatizando as matrizes de  $A$ ,  $B$  e  $C$ , chegaremos, como antes, a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); & x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

É importante notar que a escolha das variáveis auxiliares não é única. Com efeito, qualquer escolha de  $\hat{x}_i$  como combinação linear de  $y(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  e  $\ddot{y}(t)$  permitirá uma redução à forma matricial. Seja então, para este mesmo exemplo:

$$\begin{cases} \hat{x}_1(t) = -\dot{y}(t) \\ \hat{x}_2(t) = -\dot{y}(t) - \ddot{y}(t) \\ \hat{x}_3(t) = y(t) + 2\dot{y}(t) + \ddot{y}(t) \end{cases}$$

Desenvolvendo teríamos, após algebrismos não mais tão diretos, e aproveitando para simplificar mais ainda a notação:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 &= -\ddot{y} \\ &= \dot{y} + \hat{x}_2 = -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\ddot{y} - \dot{y} \\ &= -\ddot{y} - u + y + 3\dot{y} + 3\ddot{y} \\ &= (\dot{y} + \ddot{y}) + y + 2\dot{y} + \ddot{y} - u = -\hat{x}_2 + \hat{x}_3 - u \\ \dot{\hat{x}}_3 &= \dot{y} + 2\ddot{y} + \dot{y} \\ &= \dot{y} + 2\ddot{y} + u - y - 3\dot{y} - 3\ddot{y} \\ &= -y - 2\dot{y} - \ddot{y} + u = -\hat{x}_3 + u \end{cases}$$

Verificaríamos ainda que  $y = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3$ . Montando um vetor  $\hat{x}$  cujas componentes são  $\hat{x}_1$ ,  $\hat{x}_2$  e  $\hat{x}_3$  virá

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} -\beta \\ -\beta - \gamma \\ \alpha + 2\beta - \gamma \end{bmatrix} = \hat{x}_0 \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \hat{x} \end{array} \right.$$

ou ainda

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u; \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ y = \hat{C}\hat{x} \end{array} \right.$$

Diferentes escolhas das variáveis auxiliares conduzem a diferentes matrizes, mas que representam a mesma equação original. Mais tarde estudaremos com alguma profundidade este fato e veremos como escolher variáveis de maneira a obter matrizes de manuseio simples.

Os casos vistos até agora são razoavelmente diretos, pois não aparecem derivadas das entradas na EDLOF original. Vejamos então o caso geral. Seja a equação diferencial

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_mu^{(m)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u$$

com  $m \leq n$ . Notar que, por simplicidade, estamos desprezando a simbologia  $(t)$  para as funções do tempo. Uma possível escolha das variáveis auxiliares é:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ \vdots \\ x_{n-m} = y^{(n-m-1)} \\ x_{n-m+1} = y^{(n-m)} + \alpha_1 u \\ x_{n-m+2} = y^{(n-m+1)} + \alpha_1 \dot{u} + \alpha_2 u \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} + \alpha_1 u^{(m-1)} + \alpha_2 u^{(m-2)} + \dots + \alpha_{m-1} \dot{u} + \alpha_m u \end{array} \right.$$

Parece complicado mas não é: um pouco de prática acaba com qualquer possível má impressão. Os coeficientes  $\alpha_i$  devem ser escolhidos de maneira a termos

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

ou seja,  $\dot{x}_j$  não deve depender das derivadas da função forçante  $u$ . Notemos ainda que para obter uma redução matricial como desejamos a função  $f_j$  deve ser linear em seus argumentos, isto é,  $\dot{x}_j$  deve ser uma combinação linear das variáveis  $x_i$  e de  $u$ . A escolha acima permite que assim seja. Seja por exemplo a equação diferencial

$$\begin{cases} \ddot{y} + 3\ddot{y} + 2\dot{y} + y = \ddot{u} + 2\dot{u} + u \\ y(0) = \alpha ; \quad \dot{y}(0) = \beta ; \quad \ddot{y}(0) = \gamma \end{cases}$$

A escolha das variáveis auxiliares pelo procedimento acima é:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} + \alpha u \\ x_3 = \ddot{y} + \alpha \dot{u} + \beta u \end{cases}$$

Desenvolvendo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 - \alpha u \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} + \alpha \dot{u} = x_3 - \beta u \\ \dot{x}_3 = \ddot{\dot{y}} + \alpha \ddot{u} + \beta \dot{u} \\ \quad = -y - 2\dot{y} - 3\ddot{y} + \ddot{u} + 2\dot{u} + u + \alpha \ddot{u} + \beta \dot{u} \\ \quad = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + (2\alpha + 3\beta + 1)u + (3\alpha + \beta + 2)\dot{u} + (\alpha + 1)\ddot{u} \end{cases}$$

Devemos impor  $\alpha + 1 = 0$  e  $3\alpha + \beta + 2 = 0$ , donde se extrairia  $\alpha = -1$  e  $\beta = 1$ . Assim ficamos com

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_3 - u \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2u \end{cases}$$

Empilhando as variáveis  $x_i$  em uma matriz coluna  $x$  teremos, finalmente,

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y = [ \quad 1 \quad 0 \quad 0 ] x \end{cases}$$

Lembrando uma vez mais: a escolha das variáveis auxiliares não é única. O conjunto acima escolhido assim o foi por acarretar cálculos fáceis e fornecer matrizes em formas particulares. Para este mesmo exemplo poderíamos ter escolhido

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = y \\ \hat{x}_2 = \dot{\hat{x}}_1 + au \\ \hat{x}_3 = \dot{\hat{x}}_2 + bu + \alpha_1 \hat{x}_1 + \alpha_2 \hat{x}_2 \end{cases}$$

a partir de onde, com  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $\alpha_1 = 1/4$  e  $\alpha_2 = 1/2$  teríamos

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} \end{cases}$$

Vejamos, em um último exemplo, o que acontece quando  $m = n$

$$\begin{cases} \ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \ddot{u} + \dot{u} + u \\ y(0) = \alpha ; \quad \dot{y}(0) = \beta \end{cases}$$

Escolha das variáveis auxiliares:

$$\begin{cases} x_1 = y + \alpha_1 u \\ x_2 = \dot{y} + \alpha_1 \dot{u} + \alpha_2 u \end{cases}$$

Desenvolvendo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - \alpha_2 u \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} + \alpha_1 \ddot{u} + \alpha_2 \dot{u} \\ \quad = \ddot{u} + \dot{u} + u - 2y - 3\dot{y} + \alpha_1 \ddot{u} + \alpha_2 \dot{u} \\ \quad = (1 + \alpha_1) \ddot{u} + (1 + \alpha_2) \dot{u} + u - 2y - 3\dot{y} \\ \quad = (1 + \alpha_1) \ddot{u} + (1 + \alpha_2) \dot{u} + u - 2(x_1 - \alpha_1 u) - 3(x_2 - \alpha_1 \dot{u} - \alpha_2 u) \\ \quad = (1 + \alpha_1) \ddot{u} + (1 + \alpha_2 + 3\alpha_1) \dot{u} + (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 1)u - 2x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

Impondo  $\alpha_1 + 1 = 0$  e  $3\alpha_1 + \alpha_2 + 1 = 0$ , temos  $\alpha_1 = 1$  e  $\alpha_2 = 2$ , donde

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 2u \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + 2u \\ y = x_1 + u \end{cases}$$

ou, matricialmente,

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

Chamando as matrizes de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  teremos

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

A grande novidade é a existência da matriz  $D$ , ligando de uma forma direta as variáveis  $u$  e  $y$ .

## Capítulo 3

# Sistemas Não Relaxados: Noção de Estado

Lembremos, antes de mais nada, que as saídas dos sistemas relaxados dependem única e exclusivamente de suas entradas. Este fato é básico para que tais sistemas possam ser descritos por meio de operadores. Nem sempre, entretanto, este relacionamento simples entre as entradas e as saídas será válido, pois há sistemas cujas saídas podem ser afetadas não apenas pelas entradas.

**Exemplo 3.0.1** *Seja o nosso sistema um trem, e consideremos como entrada a aplicação dos freios pelo condutor. No carro-restaurante há um garçom servindo bebidas e refeições aos passageiros. Definamos a habilidade do garçom em manter o equilíbrio de sua bandeja como saída de nosso sistema. Vamos supor agora que a entrada começa a ser aplicada a partir de um dado instante  $t_0$ , quando o condutor aciona energicamente os freios, fazendo com que as sapatas pressionem fortemente as rodas. A pergunta é: que sucederá ao garçom e sua bandeja?*

*Embora isto possa surpreender às mentes mais afoitas, a única resposta possível a essa questão é: não se sabe. Com efeito, se, no instante da aplicação da entrada, o trem estivesse parado na plataforma, a entrada em ação dos freios em nada afetaria o equilíbrio do rapaz. O desastre cinematográfico, com copos e pratos se estilhaçando no chão, e tumulto generalizado apenas aconteceria se os freios fossem aplicados com o trem em movimento.*

Este exemplo ilustra bem o fato de que a saída de alguns sistemas pode depender não somente das entradas aplicadas. Ela dependerá também, de alguma maneira, de *como estava o sistema* quando a entrada começa a agir. Este *como estava o sistema*, um tanto vago, pode se relacionar com a energia

inicialmente armazenada no sistema, ou então com as entradas a ele aplicadas anteriormente.

De uma maneira geral, sistemas para os quais o conhecimento da entrada não é suficiente para a determinação exata da saída serão conhecidos como não relaxados. Uma questão surge naturalmente: o que, exatamente, devemos conhecer de tais sistemas para podermos determinar suas saídas? Que informações devemos ter a respeito deles — além das entradas é lógico — para sermos capazes de prever o comportamento de suas saídas?

A resposta a estas indagações constitui-se em um dos conceitos mais importantes da teoria de sistemas.

**Definição 3.0.1** *O estado de um sistema no instante  $t_0$ , designado por  $x(t_0)$ , é a quantidade de informação sobre o sistema em  $t_0$  que, juntamente com o conhecimento das entradas aplicadas a partir de  $t_0$ , designadas por  $u_{[t_0, \infty)}$ , determina unicamente o comportamento do sistema para qualquer instante  $t \geq t_0$ . Em símbolos:*

$$\left. \begin{array}{l} x(t_0) \\ u_{[t_0, \infty)} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{determinação precisa do comportamento futuro}$$

Como  $t_0$  é absolutamente arbitrário, podemos dizer que o estado em  $t_0$ , e em qualquer outro instante genérico  $t$ , condensa em si toda a informação importante sobre a história passada do sistema: entradas já aplicadas, relaxação, energias armazenadas, tudo enfim.

Vemos dessa maneira que o conhecimento do estado em um instante  $t$  qualquer é uma excelente medida de *como está o sistema nesse momento*, de seu comportamento, pois ele encerra todo o passado e a partir dele podemos, conhecendo as entradas, logicamente, prever o comportamento futuro do sistema.

Que devemos entender por *comportamento futuro* do sistema? O conhecimento da saída é, sem dúvida alguma, um tipo de informação que sempre no interessa saber, mas por tudo que estamos vendo sobre o estado podemos dizer que o conhecimento dele, estado, é mais importante e abrangente que o da saída.

Com estas idéias em mente podemos aperfeiçoar ligeiramente o conceito de estado: o conhecimento de  $x(t)$ , o estado em um instante  $t$  qualquer e genérico, e o das entradas a partir desse instante permite determinar precisamente o futuro a partir desse instante, futuro este que sempre pode ser medido pelo próprio estado e pelas saídas:

$$\left. \begin{array}{l} x(t) \\ u_{[t,\infty)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{determinação precisa do comportamento futuro} \\ \text{ou seja, conhecimento de:} \\ x_{[t,\infty)} \quad \text{e} \quad y_{[t,\infty)} \end{array} \right.$$

Há maneiras belamente rigorosas e matematicamente coerentes de se definir o estado de um sistema. A única pretensão da maneira aqui utilizada é a de atingir mais rapidamente a intuição física que todos temos dos fatos, e esperamos ter conseguido isso!

A enorme riqueza da idéia de estado permite que se extraia o máximo possível de informação sobre a estrutura interna do sistema e sobre o relacionamento entre as grandezas envolvidas. O estado pode ser considerado como uma radiografia capaz de revelar detalhes do interior do sistema: conhecendo-o (juntamente com as entradas) conheceremos os estados e as saídas futuras.

Embora o tratamento apresentado aqui seja aplicável a qualquer tipo de sistema, independentemente de sua natureza ou origem, devemos notar que o conceito de estado para sistemas físicos (mecânicos, elétricos, químicos, etc) admite explicações e interpretações em termos de energia, como veremos oportunamente.

### 3.1 Equações Dinâmicas e Espaço de Estados

Visto e entendido o conceito de estado é hora de especificar mais precisamente os termos de sua definição, ou seja, de traduzir matematicamente suas relações com o sistema propriamente dito e com o exterior. Para isto, chamaremos de **Equações Dinâmicas** as equações que descrevem unicamente as relações entre as entradas, as saídas e o estado de um determinado sistema.

As equações dinâmicas nada mais são do que uma maneira de expressar matematicamente as idéias desenvolvidas no conceito de estado. Para isto vamos supor que  $u(\cdot)$ ,  $x(\cdot)$  e  $y(\cdot)$  representem a entrada, o estado e a saída de um determinado sistema, e que começamos a estudá-lo no instante inicial  $t_0$ . Da própria definição de estado vem

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{[t_0,\infty)} = \underline{F}(x(t_0), u_{[t_0,\infty)}) \\ y_{[t_0,\infty)} = \underline{G}(x(t_0), u_{[t_0,\infty)}) \end{array} \right.$$

onde a notação  $m_{[t_0,\infty)}$  designa o *segmento de função*, ou seja, a função (escalar ou vetorial)  $m$  definida apenas nos instantes posteriores ou iguais a  $t_0$ .



O símbolo  $\underline{F}$  significa que o segmento de função  $x_{[t_0, \infty)}$  depende apenas da constante  $x(t_0)$  e do segmento  $u_{[t_0, \infty)}$ . Explicação similar se aplica para  $\underline{G}$ .

Se conhecemos uma função  $f$  em todo o intervalo  $[t_0, \infty)$  é óbvio que conheceremos o seu valor em qualquer instante genérico desse intervalo, e assim as expressões acima podem ser modificadas para

$$\begin{cases} x(t) = F(x(t_0), u_{[t_0, t]}) & \forall t \geq t_0 \\ y(t) = G(x(t_0), u_{[t_0, t]}) & \forall t \geq t_0 \end{cases}$$

Notar que agora  $F$  e  $G$  tem um sentido diferente do de  $\underline{F}$  e  $\underline{G}$ . Notar também que escrever  $u_{[t_0, t]}$  e não  $u_{[t_0, \infty)}$  como antes significa supor implicitamente que o sistema em consideração é físico (causal). Mesmo sem qualquer menção explícita, esta hipótese será sempre feita doravante.

Considerando um instante genérico  $t_1$  com  $t_0 \leq t_1 < t$  podemos escrever para a saída:  $y(t) = G'(x(t_1), u_{[t_1, t]})$  e, se houver condições de continuidade suficientes, quando  $t_t \rightarrow t$  teremos  $y(t) = g(x(t), u(t), t)$ .

Para o estado pode-se fazer um raciocínio análogo, baseado em condições de continuidade. Devemos ainda levar em conta o próprio conceito de estado, e, após alguns desenvolvimentos cujos detalhes serão aqui omitidos, mas que são baseados no fato de que para se prever o comportamento futuro de uma grandeza deve-se conhecer a derivada dessa grandeza, chegaríamos a  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$  onde  $\dot{x}(t)$  designa a derivada temporal da função  $x(\cdot)$  calculada no instante  $t$ . E são exatamente desta forma as equações dinâmicas que sempre veremos:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) & \longrightarrow \text{equação de estado} \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) & \longrightarrow \text{equação de saída} \end{cases}$$

Ao conjunto de todos os estados que podem caracterizar um sistema ao longo do tempo daremos o nome de **Espaço de Estados** e usaremos o símbolo  $\Sigma$  (letra sigma maiúscula do alfabeto grego, o popular somatório) ou eventualmente  $\mathcal{X}$  (letra xis maiúscula manuscrita). Desta maneira temos

$$\Sigma = \mathcal{X} = \{x(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Já temos a noção de estado, de espaço de estados e até mesmo notações para designar essas idéias. Uma questão, entretanto, ainda deve ser respondida: como seria possível, dado um sistema real e palpável do mundo físico, encontrar para ele uma grandeza, ou grandezas, com as propriedades exigidas na noção de estado?

## 3.2 Variáveis de Estado e Interpretação Energética

Para uma classe bastante vasta e significativa de sistemas será possível encontrar um número  $n$  de variáveis escalares capazes de concentrar todas as informações requeridas pela definição de estado. São as chamadas *variáveis de estado*, para as quais usaremos a notação  $x_1(\cdot), x_2(\cdot), \dots, x_n(\cdot)$ . Uma maneira matematicamente concisa e eficiente de tratarmos essas variáveis é considerá-las como uma matriz coluna com  $n$  linhas. Desta maneira o estado, ou, equivalentemente, as  $n$  variáveis de estado, podem ser formalmente designadas por

$$x(\cdot) = \begin{bmatrix} x_1(\cdot) \\ x_2(\cdot) \\ \vdots \\ x_n(\cdot) \end{bmatrix}$$

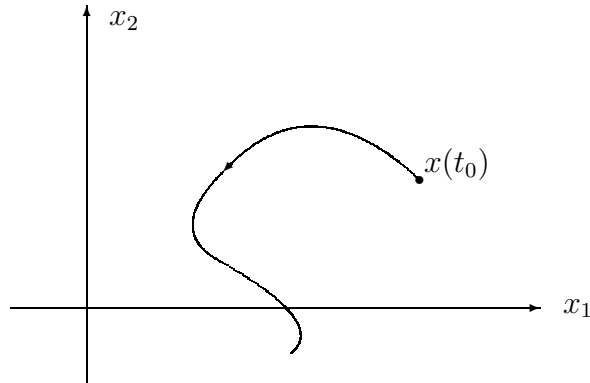
Em um instante  $t$  qualquer e genérico teríamos

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Vemos assim que o estado no instante  $t$  pode ser encarado como uma ênupla ordenada de números reais. É sabido que o conjunto de todas estas entidades possui uma estrutura de espaço vetorial sobre o corpo dos reais: é o chamado  $\mathbb{R}^n$ . Sabemos agora, então, quem é o espaço de estados:

$$\forall t, \quad x(t) \in \Sigma = \mathcal{X} = \mathbb{R}^n$$

Geometricamente podemos encarar o estado no instante  $t$  como um ponto ou vetor em um espaço  $n$ -dimensional. Com o passar do tempo este ponto se desloca desenhando trajetórias no espaço de estados. Estas linhas ou caminhos traçados ao longo do tempo são chamados de **trajetórias de estado**. Para sistemas com dimensões até 3 é fácil visualizar estas idéias. Se, por exemplo,  $n = 2$  temos  $\Sigma = \mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ :



A partir desta especificação mais esmiuçada da noção de estado pode-se reescrever as equações dinâmicas em uma forma mais detalhada. Para isto devemos ainda nos lembrar de que a entrada em um instante  $t$  qualquer é composta, no caso mais geral, por  $m$  componentes, e a saída por  $r$  componentes, ou seja,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  e  $y(t) \in \mathbb{R}^r$ . As equações dinâmicas ficam:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) & \forall i = 1, 2, \dots, n \\ y_j(t) = g_j(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) & \forall j = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$

Para sistemas físicos as variáveis de estado tem uma importante interpretação em termos de energia. Podemos, com efeito, associar a cada uma delas um dos “reservatórios de energia” do sistema. A variável  $x_i(t)$  indicaria então o nível de energia do reservatório  $i$  no instante  $t$ . É bem sabido que a energia de sistemas mecânicos pode ser armazenada, como energia potencial, em uma mola comprimida ou distendida. Ela ainda pode aparecer como a energia cinética característica de massas em movimento. Assim, o procedimento mais natural, para sistemas mecânicos, é o de escolhermos como variáveis de estado todos os deslocamentos de molas e todas as velocidades de massas. Embora outras escolhas de variáveis de estado sejam possíveis, a mais natural de todas, aquela com significado físico mais aparente é a recém mencionada, quando associamos às variáveis  $x_i$  cada um dos depósitos de energia do sistema.

Para sistemas elétricos os indutores e os capacitores funcionam como “armazéns energéticos”, como bem se sabe. Desta maneira, ao lidarmos com sistemas elétricos passivos a escolha natural das variáveis de estado seria: corrente nos indutores e tensões nos capacitores.

Diz a Física, em sua sabedoria, que para bem entendermos a realidade é necessário um conhecimento bastante completo da energia: de como ela se transforma de uma para outra de suas possíveis formas, de como ela é transmitida ao longo do tempo de um lugar a outro, quais os seus níveis em

tudo e qualquer instante, etc. Se nos restringirmos ao âmbito de um sistema, as variáveis de estado  $x_i(t)$  fornecem, pela simples razão de terem sido escolhidas para isso mesmo, nada mais nada menos do que as importantes informações acima listadas. Não é de se estranhar, portanto, que a descrição de um sistema físico por meio de seu estado seja uma das maneiras mais completas e eficientes de conhecê-lo.

Conhecer o comportamento de um número  $n$  finito, embora possa ser elevado, de reservatórios de energia é suficiente para a descrição exata de uma vasta classe de sistemas. Matematicamente traduzimos este fato dizendo que o estado pertence a um espaço de estados de dimensão finita. Trata-se de um caso bastante comum e com grande aplicabilidade prática. Ao colocarmos, como foi feito até agora e continuará sendo feito na maioria das ocasiões,  $\Sigma = \mathcal{X} = \mathbb{R}^n$  estamos obviamente supondo um sistema com espaço de estados de dimensão finita, ou, de maneira abreviada, **sistema de dimensão finita**.

Mas nem sempre a natureza é tão simples e elegante como desejaria a Matemática, e algumas vezes teima em se apresentar sob véus ainda opacos à ciência humana. Há, com efeito, sistemas onde a energia pode se armazenar em praticamente todos os pontos ao longo do volume ocupado. Para bem conhecermos sistemas desse tipo necessitamos de um número infinito de variáveis de estado. As ferramentas matemáticas atualmente disponíveis para enfrentar essa situação, os espaços vetoriais com dimensões infinitas, são considerados pelos próprios matemáticos como um terreno selvagem e inexplorado. Nem por isso o conhecimento sobre esses sistemas de dimensão infinita é pequeno. Sabe-se algo sobre eles, o que é bom e necessário, pois em algumas importantes aplicações práticas, como por exemplo nos sistemas atrasadores, é impossível estabelecermos modelos de dimensão finita razoáveis e eficientes.

Para, ainda uma vez, enfatizarmos a importância do conceito de estado vejamos a opinião sobre ele do astrônomo e matemático francês Laplace (século XVIII): “Devemos então encarar o estado do Universo como uma consequência do estado antecedente, e como a causa do estado futuro.”

### 3.3 Como Fica o Caso Linear

Quando  $f$  e  $g$  são funções lineares de seus argumentos  $x$  e  $u$  temos as chamadas **Equações Dinâmicas Lineares**. Sua forma geral é

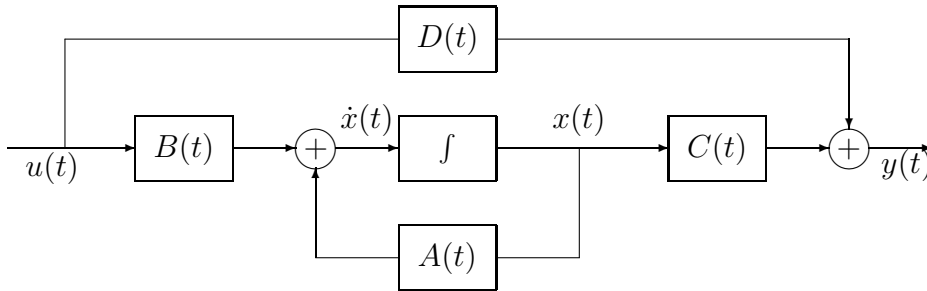
$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = a_{i1}(t)x_1(t) + a_{i2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{in}(t)x_n(t) + \\ \quad b_{i1}(t)u_1(t) + \cdots + b_{im}(t)u_m(t) \forall i = 1, 2, \dots, n \\ y_j(t) = c_{j1}(t)x_1(t) + c_{j2}(t)x_2(t) + \cdots + c_{jn}(t)x_n(t) + \\ \quad d_{j1}(t)u_1(t) + \cdots + d_{jm}(t)u_m(t) \forall j = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$

Para escrever estas equações de forma mais densa e compacta, mantendo a generalidade, podemos lançar mão de matrizes, com o que teríamos

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t); \quad x(t_0) = x^0 \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

onde  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$ ,  $C(\cdot)$  e  $D(\cdot)$  são matrizes com dimensões  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $r \times n$  e  $r \times m$ , respectivamente, e cujos elementos são funções do tempo. Além disso,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  e  $y(t) \in \mathbb{R}^r$ . Uma equação dinâmica como esta representa um sistema causal e linear em sua forma mais genérica possível: variante no tempo.

O uso dos diagramas de blocos constitui-se em uma forma equivalente de apresentar as equações dinâmicas. Eles são muito utilizados por conseguirem evidenciar de uma maneira clara as ligações existentes entre as diversas variáveis em jogo. O diagrama associado a uma equação dinâmica linear como a acima é:



Um diagrama de blocos é apenas uma maneira gráfica de escrever uma equação dinâmica. São muito usados em simulação analógica ou digital de sistemas. A passagem das equações dinâmicas para os diagramas de blocos associados deve ser praticamente automática; para o caminho inverso é sempre útil lembrar que as saídas dos integradores no diagrama correspondem às variáveis de estado.

De especial importância prática e teórica é um caso particular da equação dinâmica linear acima, quando as matrizes  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$ ,  $C(\cdot)$  e  $D(\cdot)$  são constantes:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); & x(t_0) = x^0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

onde agora  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$ ,  $C(\cdot)$  e  $D(\cdot)$  são matrizes com dimensões  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $r \times n$  e  $r \times m$ , como antes, e com elementos reais e constantes. Além disso,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  e  $y(t) \in \mathbb{R}^r$ . Tal equação dinâmica é característica da importante classe dos sistemas lineares, causais e fixos, ou invariantes no tempo. Como eles serão os personagens mais assíduos do restante destas páginas, passamos agora a estabelecer alguns fatos e a recordar outros sobre eles.

Como já foi visto, o instante inicial  $t_0$  é irrelevante para os sistemas fixos e pode, sem perda de generalidade, ser considerado igual a zero. Seja então um SLIT com estado inicial  $x(t_0) = x(0) = x_0$ . Achando as transformadas de Laplace das equações dinâmicas:

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

Rearranjando e reagrupando termos da primeira equação:

$$\begin{cases} (sI - A)X(s) = BU(s) + x_0 \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

Como a matriz  $sI - A$  é sempre inversível podemos isolar  $X(s)$ :

$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1} \{BU(s) + x_0\} \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

Vale a pena paralisar o desenvolvimento para constatar que estas expressões confirmam as idéias do conceito de estado. Elas dizem que a partir do conhecimento de  $x(0)$  e de  $u_{[t_0, \infty)}$  (ou, equivalentemente, de  $U(s)$ ) fica assegurado o conhecimento de  $X(s)$  e  $Y(s)$  ou, equivalentemente, de  $x_{[t_0, \infty)}$  e de  $y_{[t_0, \infty)}$ . Voltando às equações, e fundindo-as em uma única vem:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} \{BU(s) + x_0\} + DU(s)$$

Supondo relaxamento inicial temos  $x_0 = 0$  o que fornece

$$Y(s) = \{C(sI - A)^{-1}B + D\}U(s)$$

Lembrando que a idéia básica de matriz de transferência diz que as entradas e saídas de um SLIT relaxado se relacionam por meio de  $Y(s) = T(s)U(s)$  percebemos ter acabado de estabelecer uma maneira de exprimir a matriz de transferência de um SLIT a partir dos parâmetros de sua equação dinâmica. Na figura abaixo mostramos duas maneiras básicas de representar um SLIT: por meio de sua matriz de transferência, ou como costuma se dizer, no “domínio das frequências” e por meio de sua equação dinâmica, ou no “domínio do tempo”:

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{U(s)} \boxed{T(s)} \xrightarrow{Y(s)} & \text{ou} & \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \\ Y(s) = T(s)U(s) & & \end{array}$$

O elo de ligação entre as duas representações é

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Esta expressão fornece de uma maneira simples e direta a matriz de transferência de um SLIT descrito pelas equações dinâmicas. O problema inverso, o de encontrar as equações dinâmicas (matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ) para um SLIT descrito por sua matriz de transferência  $T(s)$  é mais complexo e é estudado pela teoria das Realizações. Chegaremos a ela, no devido tempo.

### 3.4 Como Fica o Caso Não-Linear

Nas equações dinâmicas

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) & \forall i = 1, 2, \dots, n \\ y_j(t) = g_j(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) & \forall j = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$

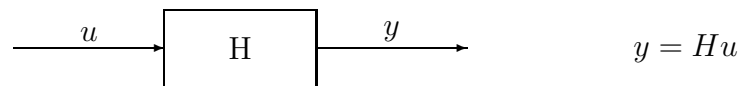
onde as funções  $f_i(\cdot)$  e  $g_j(\cdot)$  não são lineares, não se pode utilizar os métodos de transformadas de Laplace, e, conseqüentemente, de funções e matrizes de transferência. Nestes casos deveremos nos ater à representação de estados.

Por vezes, quando o sistema apresenta sub-sistemas lineares, pode-se lançar mão de funções de transferência para estas partes.

Veremos mais adiante como, no caso linear, a partir das características do sistema podemos obter a solução das equações em função de tempo, ou seja, a resposta do sistema para condições iniciais e entradas conhecidas.

### 3.5 Descrições Externas e Internas

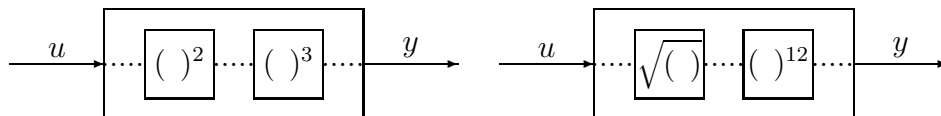
É este um bom momento para efetuar uma breve análise comparativa dos vários tipos de descrições ou modelos já vistos. Com a finalidade de desenvolver alguns parâmetros de comparação, lembremo-nos dos sistemas relaxados



Usamos operadores para descrever sistemas relaxados porque temos certeza de que a saída depende apenas da entrada. Os operadores são exemplos típicos de uma maneira de descrever sistemas chamada de **descrição externa** ou **descrição entrada-saída**. Os nomes são auto-explicativos, pois os modelos que se enquadram nesta categoria preocupam-se apenas com as entradas e saídas, não se interessando com o que ocorre *dentro*, no *miolo* do sistema. Modelos externos tradicionalmente conhecidos para os SLITs são:

1.  $G(t - \tau)$ , a matriz de resposta ao impulso, e
2.  $G(s)$ , a matriz de transferência.

A finalidade precípua das descrições externas é fornecer meios de se calcular a saída ocasionada por uma dada entrada. Assim, conhecendo o modelo entrada-saída de um sistema nós o conheceremos *pelo lado de fora*, jamais sabendo exatamente por quais transformações passa um sinal de entrada até se apresentar como saída. Por exemplo, para ambos os casos abaixo



temos  $y(t) = u(t)^6$ , ou seja, sistemas estruturalmente diferentes podem ter a mesma descrição externa.

Um estudo mais completo de sistemas, incapaz de criar ambiguidades e com o poder de descrevê-los exterior e interiormente será feito pelos chamados



modelos matemáticos *interiores* ou *internos*. Boa parte de nossas atenções futuras se dirigirá a mostrar de maneira detalhada que o conhecimento proporcionado pelas descrições internas é realmente mais profundo. Os modelos internos permitem, além da determinação da saída, o acompanhamento da evolução do estado.

Podemos agrupar as descrições já vistas de sistemas:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Integral de Superposição} \\ \text{Matriz de Transferência} \end{array} \right\} \text{ Descrições } \mathbf{Externas}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Equações Dinâmicas} \\ \text{Equações Diferenciais} \end{array} \right\} \text{ Descrições } \mathbf{Internas}$$

Note-se que uma das descrições internas — a integral de superposição — aplica-se apenas a sistemas lineares, ao passo que a outra, a matriz de transferência, é ainda mais restrita: é válida apenas para o caso linear e invariante no tempo.

### Quadro Comparativo

### Modelo Externo:

- Aplica-se apenas para sistemas relaxados.
- Não permite conhecer o funcionamento interno do sistema.
- Obtenção, para sistemas complexos, por medidas diretas: resposta ao degrau, ou a pulsos estreitos, ou a sinais periódicos.
- Aplicação simples para SLITs monovariáveis; mais dificuldades para outros tipos de sistemas.
- Técnicas cômodas, eficientes e já muito testadas de projeto, por métodos gráficos e tentativa e erros: controle **Clássico**.

### Equações Dinâmicas:

- Aplica-se para qualquer estado inicial.
- Dá informações sobre o miolo do sistema.
- Obtenção problemática para os sistemas complexos, geralmente por uso de vias indiretas, ou a partir de modelos externos.
- Permite resolver o caso multivariável e até mesmo o variante no tempo.
- As chamadas técnicas **Modernas** de controle permitem a obtenção de respostas exatas por métodos analíticos.
- Toda a teoria de controle Ótimo se baseia na formulação de espaço de estados.
- Fácil simulação em computadores analógicos ou digitais.

Análises deste quadro não levam a conclusões definitivas sobre a superioridade deste ou daquele tipo de descrição. Elas, pelo contrário, ressaltam o fato de não haver predominâncias. De fato, dependendo da situação e do tipo de sistema em consideração, qualquer um dos modelos pode se revelar o mais adequado. Como nossa escolha pode recair em um modelo matemático qualquer dos apresentados, é importante que não nos especializemos em apenas um ou alguns deles. Devemos, na medida do possível, conhecê-los todos e ter prática e familiaridade no manuseio de cada um deles.

É extremamente útil que saibamos passar de um tipo de descrição a outro, isto é, conhecido um dos modelos matemáticos de um dado sistema devemos também conhecer os outros. Sabemos, por exemplo, que para os SLITs

$$G(s) = \mathcal{L}\{G(t)\} \quad \text{e também} \quad G(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

ou seja, as passagens da matriz de resposta ao impulso  $G(t)$  à matriz de transferência  $G(s)$  e a inversa são realizadas de maneira direta. A passagem das equações dinâmicas para as matrizes de transferência são conseguidas, conforme já vimos, por intermédio da fórmula

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

A passagem inversa, de  $G(s)$  para equações dinâmicas, é muito importante e pouco trivial: será vista futuramente.

E por aqui vamos encerrando este já longo (e não tedioso, esperamos!) estudo sobre modelos matemáticos. Não que o assunto se tenha esgotado, pelo contrário até, mas há que prosseguir, e isto será feito. Às novidades, pois!

## 3.6 Breves notas sobre sistemas discretos

### 3.6.1 Seqüências

Para os nossos velhos conhecidos, os sistemas contínuos, os sinais de entrada e saída  $u$  e  $y$  são funções da variável real e contínua  $t$ , o tempo. Já vimos que há outra categoria de sistemas, os discretos. Existem sistemas naturalmente discretos e sistemas contínuos que podem ser discretizados para maior facilidade de tratamento.

Os sinais de entrada e saída de sistemas discretos serão **seqüências de números reais**, denotadas por  $\{u\}$  para as entradas e  $\{y\}$  para as saídas. Quando não houver possibilidade de confusões com sinais contínuos poderemos usar simplesmente  $u$  e  $y$  para designar as seqüências.

**Definição 3.6.1** *Uma seqüência ou sucessão  $\{f\}$  é uma aplicação do conjunto dos inteiros no conjunto dos reais:*

$$\begin{aligned} \{f\} : Z &\rightarrow \mathbb{R} \\ k &\mapsto f(k) \end{aligned}$$

onde  $k \in Z$  e  $f(k) \in \mathbb{R}$ .

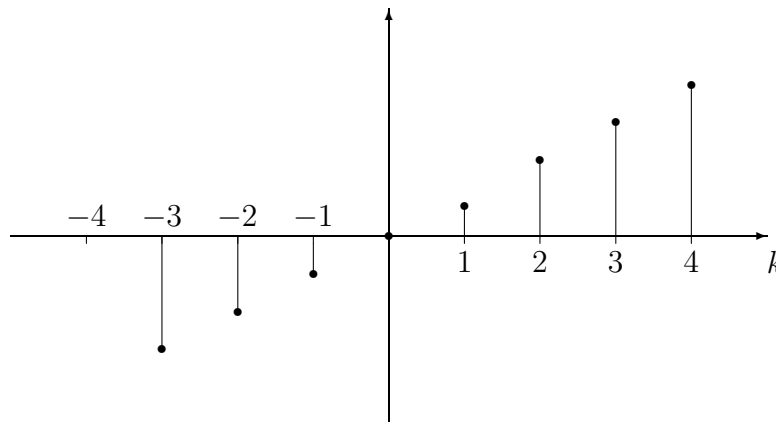
De um modo geral escreveremos, com um pouquinho de abuso de notação:

$$\{f\} = f(k) = \{\cdots f(-1) ; f(0) ; f(1) ; f(2) ; f(3) \cdots\}$$

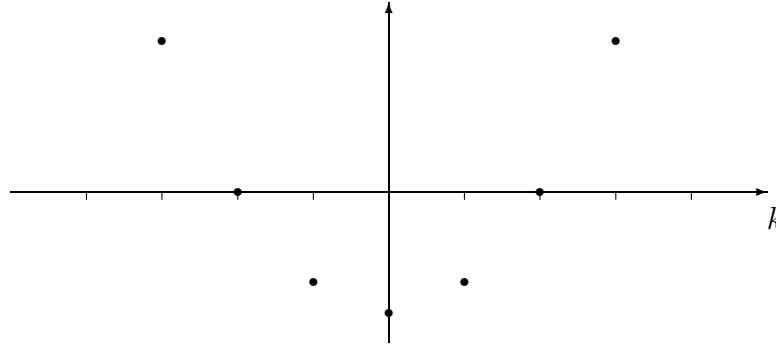
Ao invés de seqüências de números reais podemos estender o conceito para seqüências de vetores:

$$\begin{aligned} \{f\} : Z &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ k \in Z &\mapsto f(k) \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

**Exemplo 3.6.1** *Seja a seqüência  $\{f\} : Z \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $k \mapsto f(k) = k/2 \quad \forall k$ ; teremos  $\{f\} = \{\cdots -1/2 ; 0 ; 1/2 ; 1 \cdots\}$  ou, graficamente:*



Para a seqüência  $\{f\} : Z \rightarrow \mathbb{R}$  com  $k \mapsto f(k) = -2 + k^2/2 \quad \forall k$ ; teremos  $\{f\} = \{\dots -3/2 ; -2 ; -3/2 ; -1 \dots\}$  ou, graficamente:



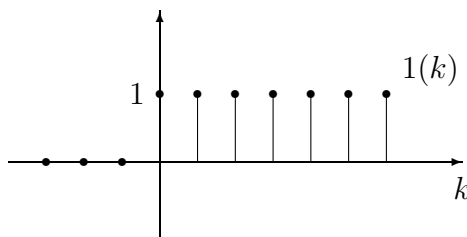
Seja agora a seqüência vetorial  $\{f\} : Z \rightarrow \mathbb{R}^2$  com

$$k \mapsto f(k) = \begin{bmatrix} e^k \\ k \end{bmatrix} \quad \forall k$$

Esta seqüência poderia ser visualizada como uma sucessão de pontos no plano  $\mathbb{R}^2$ .

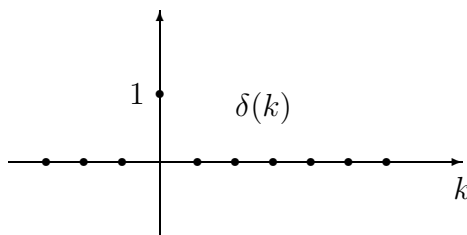
Algumas seqüências serão particularmente importantes para nós:

1. **Degrau unitário discreto** designada por  $1(k)$  e definida como 1 para  $k \geq 0$  e 0 para  $k < 0$ :



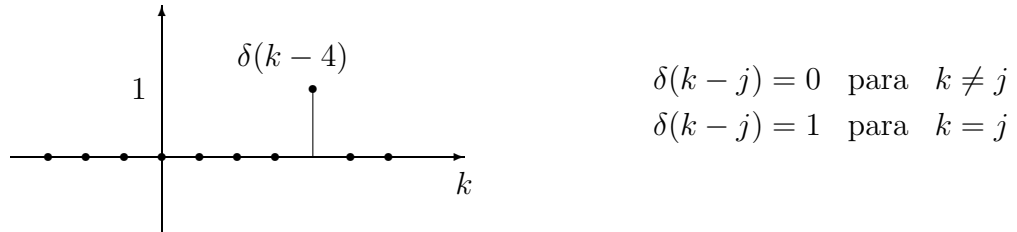
$$\begin{aligned} 1(k) &= 0 \quad \forall k < 0 \\ 1(k) &= 1 \quad \forall k \geq 0 \end{aligned}$$

2. **Impulso unitário discreto**, ou função **delta de Kronecker**, designada por  $\delta(k)$  e definida como 1 para  $k = 0$  e 0 para  $k \neq 0$ :



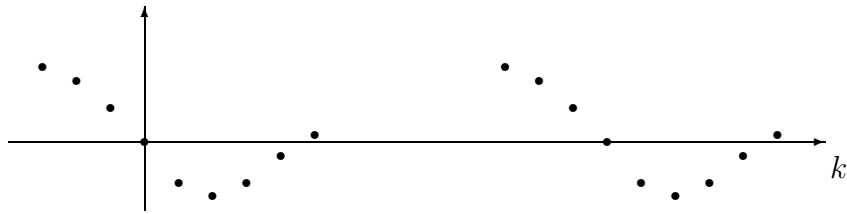
$$\begin{aligned} \delta(k) &= 0 \quad \text{para } k \neq 0 \\ \delta(k) &= 1 \quad \text{para } k = 0 \end{aligned}$$

3. **Impulso unitário deslocado**, designado por  $\delta(k - j)$  e definida como 1 para  $k = j$  e 0 para  $k \neq j$ :



4. **Seqüência geral deslocada**: sendo  $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$  uma seqüência definida por  $k \mapsto f(k)$  a seqüência deslocada  $j$  instantes é definida como

$$Q_j f : Z \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{com} \quad Q_j f(k) = f(k - j)$$



### 3.6.2 Sistemas Discretos: conceitos básicos

Como todo bom sistema que se preza, um sistema discreto “transforma” uma entrada em uma saída. A novidade é que agora os nossos sinais são seqüências:



Os conceitos de relaxação, causalidade, linearidade, invariância no tempo, etc, são definidos exatamente como no caso contínuo. As idéias são basicamente as mesmas, mudando apenas a variável tempo: antes era contínua, agora é discreta. O estudo das duas categorias de sistemas segue um paralelismo quase perfeito.

#### Resposta ao impulso

Quando a entrada de um sistema discreto é a seqüência  $\{u\} = \delta(k - m)$ , um delta de Kronecker aplicado no instante  $m$ , chamamos a saída correspondente de **resposta ao impulso** do sistema, e a denotamos por  $g(k, m)$ :

Quando  $\{u\} = \delta(k - m)$  então  $\{y\} = g(k, m)$

A resposta ao impulso pode auxiliar no cálculo da resposta de alguns tipos de sistemas a uma entrada qualquer. Com efeito, para sistema discretos lineares e relaxados podemos escrever a **somatória de superposição**:

$$y(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(k, m)u(m)$$

Assim como no caso contínuo, a resposta ao impulso caracteriza completamente um sistema discreto linear e relaxado. Conhecendo-a conheceremos a saída para qualquer entrada.

Se o nosso sistema for causal e relaxado em  $k = k_0$  (além de linear, lógico!) a expressão se particulariza:

$$y(k) = \sum_{m=k_0}^k g(k, m)u(m)$$

Como seria de se esperar, a invariância no tempo é caracterizada por

$$g(k, m) = g(k - m)$$

e neste caso, sendo o instante inicial  $k_0$  completamente irrelevante, teremos a **somatória de convolução**:

$$y(k) = \sum_{m=0}^k g(k - m)u(m)$$

**Exemplo 3.6.2** *Em um sistema linear invariante no tempo e relaxado a saída quando  $\{u\} = \delta(k)$  é dada por*

$$g(k) = \begin{cases} 0 & \text{para } k \leq 0 \\ 2^k & \text{para } k \geq 1 \end{cases}$$

*Calcular a seqüência de saída quando a entrada é dada por*

$$u(k) = \begin{cases} 0 & \text{para } k < 0 \\ k & \text{para } k \geq 0 \end{cases}$$

*Analisando a resposta ao impulso  $g(k)$  verificamos que o sistema é causal, e então*

$$y(k) = \sum_{m=0}^k g(k-m)u(m)$$

donde

$$\begin{aligned} y(k) &= 0 & \forall k \leq 0 \\ y(1) &= g(1)u(0) + g(0)u(1) = 0 \\ y(2) &= g(2)u(0) + g(1)u(1) + g(0)u(2) = 2 \\ y(3) &= \dots\dots = 8 \\ y(4) &= \dots\dots = 22 \\ &\vdots & \vdots \end{aligned}$$

*E assim por diante. Notemos que a somatória de convolução permite o cálculo da seqüência de saída ponto por ponto. Seria muito bom se houvesse uma expressão genérica que fornecesse o valor de  $y$  para um instante  $k$  qualquer. Para este exemplo conseguiríamos exprimir  $y$  como*

$$y(k) = 2(2^k - k - 1) \quad \forall k \geq 1$$

*após um trabalho cheio de artifícios sobre a somatória de convolução.*

É quase sempre difícil encontrarmos uma expressão analítica para a saída e esta é uma grande desvantagem do uso das somatória de superposição no estudo de sistemas discretos: obteremos a saída na marra, ponto a ponto.

Que não nos abale uma pequenina dificuldade. Que não se percam as esperanças, pois há solução para tudo. O que nos facilitará as coisas de agora em diante é a:

### Transformada em $z$ de uma seqüência

Lembramos mais uma vez que o paralelismo com o caso contínuo é quase total: a transformada de Laplace e todo o seu extraordinário poder simplificador encontram correspondência no campo discreto.

Senão vejamos: vamos considerar de agora em diante seqüências definidas apenas para valores positivos de  $k$ :

$$f(k) \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots\dots$$



A transformada em  $z$  de uma seqüência  $f(k)$ , denotada por  $\mathcal{Z}\{f(k)\}$ , é uma função complexa da variável complexa  $z$  definida por

$$\mathcal{Z}\{f(k)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots$$

Para quem gosta de matemátiquês, sendo

$$\mathcal{F} = \{\{f\} : Z^+ \rightarrow \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\}$$

a transformada em  $z$  seria denotada pelo mapeamento

$$\mathcal{Z} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$$

com lei de associação dada por

$$f(k) \mapsto F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

A título de exemplos, vamos calcular algumas transformadas importantes que deverão ser memorizadas:

**Exemplo 3.6.3** *Para o degrau unitário discreto,  $1(k)$ , temos, aplicando a definição:*

$$f(k) = 1(k) \implies F(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots = 1 + \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \dots$$

*Lembre-mos (2º científico, mais ou menos) de algo chamado “soma dos termos de uma PG ilimitada”. Algum tempo depois, já universitários, era a tal “série geométrica”. De uma maneira ou de outra agora veremos realmente para que serve isso:*

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

*desde que algumas sutilezas —  $|x| < 1$  — sejam satisfeitas. Para todos os efeitos a nossa transformada em  $z$  sempre convergirá, e então:*

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

*Supimpa!*

**Exemplo 3.6.4** Para a exponencial discreta,  $a^k$ , temos, aplicando a definição:

$$f(k) = a^k \implies F(z) = 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \frac{a^3}{z^3} + \cdots = \frac{1}{1 - (a/z)} = \frac{z}{z - a}$$

**Exemplo 3.6.5** Para o impulso unitário discreto,  $\delta(k)$ , temos, trivialmente:

$$f(k) = \delta(k) \implies F(z) = 1$$

Para o impulso deslocado teríamos  $f(k) = \delta(k - m) \implies F(z) = z^{-m}$

Há tabelas listando várias seqüências e suas transformadas. Para nós, o uso da definição e de algumas propriedades permitirá o cálculo para as seqüências mais importantes.

### Propriedades da transformada z

1. Linearidade:

$$\mathcal{Z} \{a_1 f_1(k) + a_2 f_2(k)\} = a_1 \mathcal{Z} \{f_1(k)\} + a_2 \mathcal{Z} \{f_2(k)\} = a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z)$$

onde  $a_{1,2}$  são coeficientes reais quaisquer e  $f_{1,2}(k)$  são seqüências quaisquer.

2. Multiplicação por exponencial:

$$\mathcal{Z} \{a^k f(k)\} = F(z/a)$$

onde  $a$  é um real qualquer.

3. Seqüências deslocadas:

$$\mathcal{Z} \{f(k - m)\} = z^{-m} F(z) + \sum_{j=1}^m z^{j-m} f(-j)$$

$$\mathcal{Z} \{f(k + m)\} = z^m F(z) - \sum_{j=0}^{m-1} z^{m-j} f(j)$$

Como exemplo, sejam as seqüências deslocadas de uma e duas unidades:

$$\mathcal{Z} \{f(k - 1)\} = z^{-1} F(z) + f(-1)$$

$$\mathcal{Z} \{f(k - 2)\} = z^{-2} F(z) + z^{-1} f(-1) + f(-2)$$

$$\mathcal{Z} \{f(k + 1)\} = z F(z) - z f(0)$$

$$\mathcal{Z} \{f(k + 2)\} = z^2 F(z) - z^2 f(0) - z f(1)$$

#### 4. Várias outras ...

O problema da antitransformada — dada  $F(z)$  encontrar  $f(k)$  — será sempre resolvido com uma consulta à tabela. Quando a  $F(z)$  em estudo é muito complicada devemos “prepará-la”, usualmente com uma expansão em frações parciais, antes de recorrer à tabela.

**Exemplo 3.6.6** Dada  $F(z)$  é sempre conveniente expandir  $F(z)/z$  em frações parciais para achar a antitransformada:

$$F(z) = \frac{2z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{2z}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{\alpha}{z-1} + \frac{\beta}{z-2} + \frac{\gamma}{z-3}$$

Resolvendo encontraríamos  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -2$ ,  $\gamma = 3$ , donde

$$F(z) = \frac{z}{z-1} - 2\frac{z}{z-2} + 3\frac{z}{z-3}$$

e, obviamente

$$f(k) = -1(k) - 2(2^k) + 3(3^k)$$

ou

$$f(k) = 1 - 2^{k+1} + 3^{k+1} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

A primeira das aplicações da transformada em  $z$  são as ...

### 3.6.3 Equações a diferenças

No caso contínuo, duas funções são relacionadas por meio de uma equação diferencial. Agora uma equação a diferenças fará a mesma coisa com duas seqüências.

Uma equação a diferenças linear e invariante no tempo apresenta a seguinte estrutura geral:

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \dots + a_1y(k+1) + a_0y(k) = b_mu(k+m) + \dots + b_0u(k)$$

Dada a seqüência de entrada  $u(k)$  conseguiremos a solução  $y(k)$  conhecendo as condições iniciais  $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$ .

Há várias maneiras para resolvermos esse tipo de equação. Nestas brevíssimas notas usaremos apenas as transformadas em  $z$  as quais, diga-se de passagem, são o método mais simples e eficaz.

**Exemplo 3.6.7** Um sistema discreto linear, invariante no tempo e relaxado, é representado pela equação a diferenças a seguir:

$$y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 2u(k+1) - 2u(k)$$

Encontrar a saída  $y(k)$  quando a seqüência de entrada é  $k1(k)$ , ou seja,  $u(k) = k$  para  $k \geq 0$  e  $u(k) = 0$  para  $k < 0$ .

Transformando a equação dada temos

$$z^2 Y(z) - z^2 y(0) - zy(1) - 3z(Y(z) - y(0)) + 2Y(z) = 2z(U(z) - u(0)) - 2U(z)$$

Como o sistema é relaxado as condições iniciais são nulas, e então, agrupando:

$$(z^2 - 3z + 2)Y(z) = 2(z - 1)U(z)$$

Fatorando vem

$$(z - 1)(z - 2)Y(z) = 2(z - 1)U(z) \quad \text{onde} \quad Y(z) = \frac{2}{z - 2}U(z)$$

Em uma tabela (ou então aplicando a definição e fazendo as contas) verificaríamos que a transformada em  $z$  da seqüência  $u(k) = k1(k)$  é dada por  $U(z) = z/(z - 1)^2$ . Assim a expressão para a solução fica

$$Y(z) = \frac{2z}{(z - 2)(z - 1)^2}$$

Expandindo  $Y(z)/z$  em frações parciais (sempre usaremos este macete: expandir  $F(z)/z$  ao invés de simplesmente  $F(z)$ ) obteremos

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{(z - 2)(z - 1)^2} = \frac{\alpha}{z - 2} + \frac{\beta}{z - 1} + \frac{\gamma}{(z - 1)^2}$$

Um algebrismozinho elementar forneceria  $\alpha = 2, \beta = \gamma = -2$ , donde

$$\frac{Y(z)}{z} = 2 \left( \frac{1}{z - 2} + \frac{1}{z - 1} + \frac{1}{(z - 1)^2} \right)$$

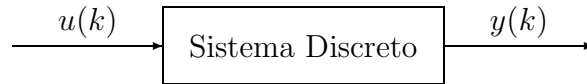
ou então

$$Y(z) = 2 \left( \frac{z}{z - 2} + \frac{z}{z - 1} + \frac{z}{(z - 1)^2} \right)$$

Deste ponto a obtenção das seqüências é fácil, ou por meio de uma tabela ou por meio das propriedades, levando a

$$y(k) = 2(2^k - k - 1) \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

### 3.6.4 Matriz de transferência discreta



Há pouquíssimas páginas atrás vimos que um sistema discreto linear, relaxado, invariante no tempo e causal pode ser representado pela somatória de convolução:

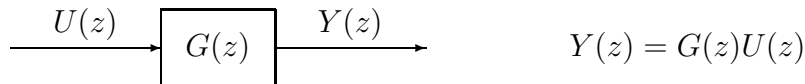
$$y(k) = \sum_{j=0}^k g(k-j)u(j)$$

Usando a teoria das transformadas em  $z$  nesta expressão demonstraríamos facilmente que

$$Y(z) = G(z)U(z) \quad \text{onde} \quad G(z) = \mathcal{Z} \{g(k)\}$$

é chamada de **matriz de transferência discreta** ou **amostrada**.

A matriz de transferência discreta representa completamente um sistema discreto, linear, invariante no tempo, relaxado e causal. Conhecendo-a conheceremos a saída para qualquer entrada:



Já temos uma arma mais poderosa para atacar um problema anterior, o exemplo 3.6.2, formulado novamente agora:

**Exemplo 3.6.8** *Um sistema discreto linear, relaxado e invariante no tempo tem  $g(k) = 0$  para  $k < 0$  e  $g(k) = 2^k$  para  $k \geq 1$  como resposta ao impulso; calcular sua saída quando  $u(k) = k1(k)$ .*

*Devemos encontrar sua matriz de transferência (no caso, função, pois há apenas uma entrada e uma saída) amostrada:*

$$G(z) = \mathcal{Z} \{g(k)\}$$

*Aplicando a definição:*

$$G(z) = \mathcal{Z} \{g(k)\} = \sum_{j=0}^{\infty} g(j)z^{-j}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 + 2z^{-1} + 2^2z^{-2} + 2^3z^{-3} + \dots \\
&= \left(1 + (2/z) + (2/z)^2 + (2/z)^3 + \dots\right) - 1 \\
&= \frac{z}{z-2} - 1 \\
&= \frac{2}{z-2}
\end{aligned}$$

Como  $u(k) = k1(k)$  temos  $U(z) = z/(z-1)^2$  levando a

$$Y(z) = \frac{2z}{(z-2)(z-1)^2}$$

cuja transformada já vimos.

### 3.6.5 Equações Dinâmicas Discretas

O conceito de estado, com todas as suas vantagens, também pode (e deve!) ser definido para os sistemas discretos. A teoria é perfeitamente análoga e leva às seguintes equações para um sistema discreto linear e causal:

$$\text{ED} \begin{cases} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k) \\ x(k_0) &= x^0 \end{cases}$$

Se o nosso sistema for ainda invariante no tempo:

$$\text{EDF} \begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \\ x(k_0) &= x^0 \end{cases}$$

Temos agora equações a diferenças e não diferenciais. A “dinamicidade” está agora implícita apenas em  $x(k+1)$ , quando antes estava na derivada  $\dot{x}$ , que media as tendências do sistema. No caso discreto  $x(k+1)$  representa esse papel, mostrando como calcular o próximo estado.

A solução para as equações dinâmicas é obtida mais facilmente do que no caso contínuo. Vejamos:

$$\begin{aligned}
x(1) &= Ax(0) + Bu(0) \\
x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1) \\
x(3) &= Ax(2) + Bu(2) = A^3x(0) + A^2Bu(1) + ABu(1) + Bu(2) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Para o instante genérico  $k$  teremos

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} B u(j)$$

e para a saída

$$y(k) = C A^k x(0) + \left( \sum_{j=0}^{k-1} C A^{k-1-j} B u(j) \right) + D u(k)$$

Empregando estas fórmulas para obtermos a solução poderemos encontrar séries difíceis de exprimir em “forma fechada”. O remédio é, novamente, o emprego das transformadas em  $z$ . Usando-as nas equações dinâmicas:

$$zX(z) - zx(0) = AX(z) + BU(z)$$

$$zX(z) - AX(z) = BU(z) + zx(0)$$

$$X(z) = (zI - A)^{-1} [BU(z) + zx(0)]$$

Entrando agora com a equação de saída e considerando relaxação inicial, isto é,  $x(0) = 0$ , vem

$$Y(z) = \left( C(zI - A)^{-1} B + D \right) U(z) = G(z)U(z)$$

expressão esta que nos ensina a calcular a matriz de transferência discreta de um sistema discreto descrito por suas equações dinâmicas.

Vimos assim que os sistemas contínuos e discretos são estruturalmente muito semelhantes. Ambos podem ser representados por uma quádrupla de matrizes  $\langle A, B, C, D \rangle$  de dimensões compatíveis. A partir delas a passagem para uma descrição externa é feita da mesma maneira:

$$G(\xi) = C(\xi I - A)^{-1} B + D \quad \left\{ \begin{array}{ll} \xi = s & \longrightarrow \text{caso contínuo} \\ \xi = z & \longrightarrow \text{caso discreto} \end{array} \right.$$

O estado inicial, no caso discreto, vem multiplicado por  $z$ , sendo esta uma diferença com relação ao caso contínuo, mas o estudo dos dois campos segue sempre paralelo: tudo que acontece em um encontrará eco equivalente no outro.

Como a descrição interna é a mais poderosa percebemos, com um pouquinho de abstração, que os conceitos de “contínuo” e “discreto” perdem um pouco o significado. Basta conhecermos as matrizes  $A, B, C$  e  $D$  e poderemos estudar todas as possíveis propriedades que as interligam sem nos preocuparmos com a natureza dos sistemas sob consideração.

Embora este enfoque “matematizante” seja perfeitamente válido procuraremos não nos afastar muito do aspecto físico dos sistemas. Neste curso o maior interesse é nos sistemas contínuos, mas sempre que for conveniente lançaremos mão dos sistemas discretos. Às vezes eles facilitam as coisas.

Paramos por aqui. Já não era sem tempo, dirão alguns. Mas ... apenas isso? retrucarão outros.

Para o momento é isso, gente.



## Capítulo 4

# Resolução de Equações Dinâmicas

O problema em consideração é de importância capital: conhecendo a entrada de um sistema queremos também conhecer o estado e a saída. Em outras palavras, mais matemáticas, devemos, a partir do conhecimento da função  $u(\cdot)$  determinar as funções  $x(\cdot)$  e  $y(\cdot)$ . Devemos para isso resolver as equações dinâmicas que constituem o modelo matemático do sistema. Para o caso linear geral:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t); & x(t_0) = x^0 \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

onde, como já sabemos,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^r$ , e as matrizes  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$ ,  $C(\cdot)$  e  $D(\cdot)$  possuem ordens compatíveis.

Para os casos que realmente interessam, os de equações que representam sistemas concretos, as matrizes  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$ ,  $C(\cdot)$  e  $D(\cdot)$  dependem de maneira contínua ou contínua por partes do tempo. Nestas condições a Matemática nos garantiria a unicidade da solução, ou seja, dados  $x(t_0)$  e  $u(\cdot)$ , existe uma única função  $x(\cdot)$  que satisfaz a equação diferencial dada.

Já neste ponto devemos notar que a solução da equação de saída é trivial, desde que a equação de estado tenha sido resolvida. Por este motivo concentraremos a atenção apenas nos métodos de obtenção do estado  $x(\cdot)$ . Para realçar o fato de que em um instante genérico  $t$  a solução  $x(t)$  depende da entrada  $u(\cdot)$ , da condição inicial  $x(t_0)$  e, obviamente, de  $t$  usaremos a seguinte notação:

$$x(t) = \sigma(t; t_0; x^0; u)$$

Para calcular efetivamente a solução  $x$  lançaremos mão de uma propriedade dos sistemas lineares, a Propriedade da Decomposição. Antes dela,

algumas definições

**Definição 4.0.2** *A resposta ao estado zero de um sistema, abreviada por REZ, é a resposta apresentada por ele quando a condição inicial é nula:  $x(t_0) = 0$*

Usando a simbologia introduzida acima teríamos:  $REZ = \sigma(t; t_0; 0; u)$ . Esta REZ nada mais é do que uma medida de como o sistema reage às entradas que lhe são aplicadas.

**Definição 4.0.3** *A resposta à entrada nula de um sistema, abreviada por REN, é a resposta apresentada por ele quando a entrada é nula:  $u(t) = 0 \forall t$*

A REN mede a reação do sistema às condições iniciais que lhe são aplicadas e pode ser anotada como  $REN = \sigma(t; t_0; x_0; 0)$ . Já se pode enunciar o

**Teorema 4.0.1 — Propriedade da Decomposição** — *A resposta de um sistema linear sempre pode ser decomposta em uma soma de duas parcelas: a resposta ao estado zero e a resposta à entrada nula. Chamando de  $R$  a resposta do sistema linear temos*

$$R = REZ + REN$$

No arrazoadado acima a palavra resposta pode designar tanto o estado com a saída. No caso de se considerar o estado podemos aplicar a notação já apresentada e escrever a propriedade da decomposição como

$$\sigma(t; t_0; x_0; u) = \sigma(t; t_0; 0; u) + \sigma(t; t_0; x_0; 0)$$

Embora correndo o risco da redundância, devemos repetir que a propriedade da decomposição se aplica apenas para sistemas lineares. Como, felizmente, nosso caso é este a busca em que nos empenhamos pode ser efetuada em duas etapas, a primeira das quais será

## 4.1 Resposta à Entrada Nula de Sistemas Lineares

A relação matemática que traduz esta situação recebe o nome de **equação homogênea**. Ei-la:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Querer solucionar a equação homogênea significa desejar encontrar a REN:  $x(t) = \sigma(t; t_0; x_0; 0)$ . Mais uma vez lembramos que, para todo  $t$ ,  $A(t)$  é uma matriz  $n \times n$  e  $x(t)$  um vetor do  $\mathbb{R}^n$ .

Passemos a estudar as propriedades das soluções da equação acima. Para isso, seja  $\psi(\cdot)$  a solução da equação homogênea quando  $x^0 = e$ , um vetor genérico do  $\mathbb{R}^n$ . Em símbolos temos  $\psi(t) = \sigma(t, t_0, e, 0)$ . Obviamente a função  $\psi(\cdot)$  tem a seguinte propriedade:

$$\dot{\psi}(t) = A(t)\psi(t); \quad \psi(t_0) = e$$

Estas considerações seriam suficientes para estabelecer o seguinte

**Teorema 4.1.1** *O conjunto de todas as soluções  $\psi$  de uma equação homogênea como acima forma um espaço vetorial  $n$ -dimensional com o corpo dos reais.*

Este importante resultado não será provado neste texto, embora a demonstração seja simples e direta. Dentre suas inúmeras conseqüências podemos citar, apenas como exemplos:

1. Se  $\psi^1$  e  $\psi^2$  são soluções da equação homogênea então  $\alpha_1\psi^1 + \alpha_2\psi^2$  também será solução, quaisquer que sejam os reais  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ .
2. Sempre existe um conjunto de  $n$  soluções  $\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^n$  de tal modo que uma solução qualquer  $\psi$  pode ser expressa como  $\psi = \alpha_1\psi^1 + \alpha_2\psi^2 + \dots + \alpha_n\psi^n$  onde os  $\alpha_i$  são reais.

E poderíamos nos alongar nesta lista. O importante, que deve ser mantido em mente, é que as soluções de uma equação homogênea gozam de todas as propriedades comuns aos elementos de um espaço vetorial  $n$ -dimensional. Diga-se de passagem que este conjunto das  $\psi$  é um bom exemplo de espaço vetorial  $n$ -dimensional que não seja o  $\mathbb{R}^n$  ou o  $\mathbb{C}^n$ .

Os conceitos seguintes são conseqüências do teorema anterior.

**Definição 4.1.1** *A matriz fundamental associada a uma equação homogênea como acima é uma matriz  $F$   $n \times n$  cujas colunas são soluções linearmente independentes da referida equação.*

Ou seja, quando agrupamos lado a lado os elementos de uma base do espaço vetorial das soluções teremos uma matriz fundamental.

**Exemplo 4.1.1** *Seja a seguinte equação homogênea*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

*Seria simples verificar que os vetores*

$$\psi^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \psi^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ t^2 \end{bmatrix}$$

*são soluções, ou seja,  $A(t)\psi^i(t) = \psi^i(t)$  para  $i = 1, 2$ . Assim, como estes vetores são linearmente independentes, temos*

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix}$$

Devemos notar que, dada uma equação homogênea, a matriz fundamental não é única, e que nem sempre sabemos determiná-la de uma maneira simples como acima. Em um número assustadoramente grande de casos não conseguiremos sequer encontrá-la. Um dos grandes problemas ainda existentes no campo dos sistemas lineares é exatamente ligado ao fato de não haver meios para a determinação da matriz fundamental. Em alguns casos a tarefa é fácil, como no exemplo acima, onde podemos “chutar” com rapidez e eficiência.

No caso particular dos sistemas lineares invariantes no tempo algumas sutilezas desaparecem e a busca das matrizes fundamentais é também simplificada. No caso geral, entretanto, devemos estar preparados para a ausência total de métodos e o uso de procedimentos baseados unicamente no “chute”. Quase sempre é tarefa inglória, mas nem por isso as matrizes fundamentais são menos importantes. Apesar de serem de obtenção difícil as matrizes fundamentais tem um papel destacado no problema ora em estudo. Daí o nome ...

**Teorema 4.1.2** *A matriz fundamental  $F(t)$  é não singular  $\forall t \in \mathbb{R}$*

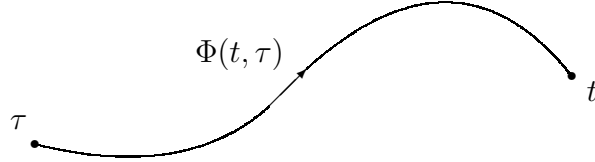
Também este resultado vai sem prova. Ele é necessário para se poder formular o próximo conceito

**Definição 4.1.2** *Sendo  $F(t)$  uma matriz fundamental qualquer associada à equação homogênea chamaremos de **matriz de transição de estados** a matriz  $n \times n$  obtida a partir de  $\Phi(t, \tau) = F(t)F^{-1}(\tau)$*

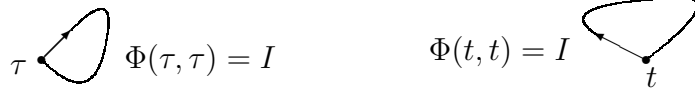
Temos em mãos uma matriz cujos elementos dependem de dois parâmetros reais  $t$  e  $\tau$ . Usando a definição conseguiríamos provar cada uma das seguintes propriedades

1.  $\Phi(t, t) = \Phi(\tau, \tau) = I \quad \forall t, \tau \in \mathbb{R}$
2.  $\Phi(t, \tau) = \Phi^{-1}(\tau, t) \quad \forall t, \tau \in \mathbb{R}$
3.  $\Phi(s, \tau) = \Phi(s, t)\Phi(t, \tau) \quad \forall t, \tau, s \in \mathbb{R}$
4.  $\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, \tau) = A(t)\Phi(t, \tau)$

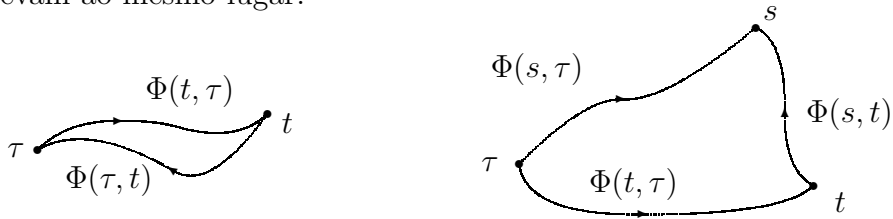
Uma maneira fácil de visualizarmos estas propriedades (as três primeiras delas) é considerarmos  $\Phi(t, \tau)$  como uma “condução”, um veículo que nos leva do ponto  $\tau$  ao ponto  $t$ :



Como a identidade nada modifica, trazendo-nos de volta ao ponto de partida, é óbvio que



Para as outras propriedades considere as seguintes afirmações: “a volta é o inverso da ida” e “há caminhos alternativos, passando por outras escalas, que levam ao mesmo lugar.”



A quarta propriedade não tem uma explicação visual comparável a estas.

Como a matriz de transição de estados é obtida a partir da matriz fundamental, ela também apresenta as mesmas dificuldades de obtenção: os processos para determiná-la são baseados, em sua maioria, em chutes. Uma grande particularidade, porém, deve ser ressaltada: apesar de a matriz fundamental não ser única a matriz de transição de estados é. Isto não será provado aqui.

A próxima propriedade é tão importante que, ao invés de receber o número 5 será enunciada como

**Teorema 4.1.3** *A solução da equação homogênea*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

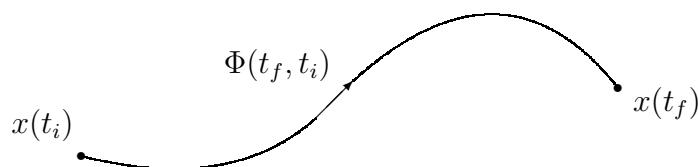
é única e pode ser encontrada a partir de  $x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0)$  onde  $\Phi(\cdot, \cdot)$ , é a matriz de transição de estados de  $A(t)$ .

A demonstração deste resultado, apesar de simples, será omitida.

Este teorema também fornece um novo significado para a matriz de transição de estados: ela mapeia estados iniciais em estados finais. Este comportamento ainda poderia ser generalizado para instantes quaisquer: conhecendo o estado em um instante  $t_i$  qualquer o estado em  $t_f$  será dado por

$$x(t_f) = \Phi(t_f, t_i)x(t_i) \quad \forall t_i, t_f \in \mathbb{R}$$

O nome transição de estados provém exatamente desta propriedade, e o modelo pictórico usado acima para visualizar as propriedades de  $\Phi(t, \tau)$  pode ser aperfeiçoado:



Independentemente de suas belas características teóricas, a matriz de transição de estados  $\Phi(\cdot, \cdot)$  será usada por nós apenas para encontrar a REN de um sistema linear:  $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$ .

**Exemplo 4.1.2** *Resolver a equação homogênea*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} x(t); \quad x(t_0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Já conhecemos uma matriz fundamental para este caso:

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix} \quad \text{cuja inversa é} \quad F^{-1}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -t^2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

donde, usando a definição de matriz de transição de estados:

$$\Phi(v, w) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ v^2 - w^2 & 2 \end{bmatrix}$$

Considerando  $t_0 = 0$  e usando a expressão da REN temos

$$x(t) = \Phi(t, 0)x(0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ t^2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \frac{t^2}{2} + \beta \end{bmatrix}$$

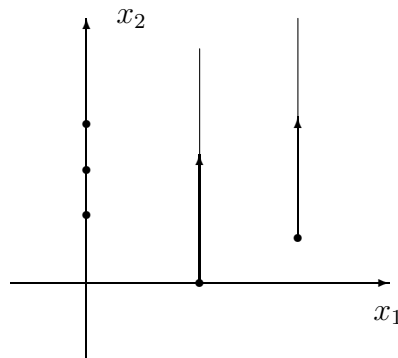
Se  $\alpha = 0$  e  $\beta = \text{cte}$  teremos

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} = x_0 \quad \forall t$$

Se  $\beta = 0$  e  $\alpha = \text{cte}$  teremos

$$x(t) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

Estes tipos de solução estão esquematizados na figura abaixo, que representa, para este exemplo, o espaço de estados e as trajetórias. Notemos que estados iniciais com  $\alpha = 0$  dão origem a trajetórias pontuais: o estado permanece indefinidamente no mesmo ponto. Estados iniciais localizados em outras regiões do plano originarão trajetórias retilíneas e paralelas:



## 4.2 Resposta ao Estado Zero de Sistemas Lineares

Esta situação é traduzida por uma relação matemática chamada **equação completa**:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(t_0) = x^0 = 0 \end{cases}$$

Solucionar esta equação completa com  $x(t_0) = 0$  equivale a encontrar a REZ  $x(t) = \sigma(t; t_0; 0; u)$ . Também aqui a matriz de transição de estados é crucial, pois

**Teorema 4.2.1** *A solução da equação completa com  $x(t_0) = 0$  é dada por*

$$x(t) = \sigma(t; t_0; 0; u) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau$$

A finalidade destas notas não é a mesma dos livros-textos, onde se pode encontrar demonstrações boas e detalhadas de todas as afirmações e de todas as passagens. Queremos aqui transmitir a essência da informação, omitindo sempre que possível as technicalidades. Vez por outra prova-se alguma coisa, o que não é o caso neste ponto, onde apenas fornecemos uma fórmula, alegamos sua exatidão e passamos para a frente.

**Exemplo 4.2.1** *Resolver a equação completa*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t); \quad x(t_0) = 0$$

*Para encontrar  $x(t)$  precisamos da matriz de transição de estados. Olhando para trás um pouco:*

$$\Phi(t, \tau) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ t^2 - \tau^2 & 2 \end{bmatrix}$$

*Usando o teorema anterior vem*

$$x(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau$$

*Supondo  $t_0 = 0$  e  $u(t) = 1(t)$ , um degrau unitário, a integral acima forneceria*

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$$

*a solução procurada.*



## 4.3 Resposta Geral de Sistemas Lineares

Reunindo as últimas informações já somos capazes de solucionar a equação

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

Para isso devemos empregar a propriedade de decomposição  $R = REZ + REN$  ou, em sua outra notação,  $x(t) = \sigma(t; t_0; x_0; u) = \sigma(t; t_0; 0; u) + \sigma(t; t_0; x_0; 0)$ . Com o auxílio dos resultados anteriores:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

Poder-se-ia mostrar, usando propriedades não vistas das matrizes de transição de estados, que  $\Phi(t, \tau) = \Phi(t, t_0)\Phi(t_0, \tau)$ , com o que podemos modificar um pouco a fórmula acima:

$$x(t) = \Phi(t, t_0) \left[ x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \right]$$

Para obter uma expressão para a saída devemos solucionar o conjunto das equações dinâmicas de estado e saída:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t); & x(t_0) = x^0 \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

Como a equação de saída não envolve derivações, o conhecimento adquirido até agora permite escrever

$$y(t) = C(t) \left[ \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \right] + D(t)u(t)$$

Podemos considerar concluída a tarefa de buscar soluções para equações dinâmicas lineares. É necessário, entretanto, mencionar um inconveniente dos métodos usados: a necessidade de se utilizar a matriz de transição de estados  $\Phi(v, w)$ . Para o caso geral, sendo dada uma matriz  $A(t)$  qualquer, não se conhecem métodos teóricos que permitam o cálculo de  $\Phi$ , e isto é um problema sério. Podemos pensar que talvez haja outros métodos onde a matriz  $\Phi$  não seja necessária, mas isto é falso, pelo menos por tudo que se sabe até o presente, e assim devemos nos conformar com todas as dificuldades (o melhor seria dizer impossibilidades) envolvidas na obtenção da matriz de transição de estados. Estas dificuldades serão consideravelmente minoradas

no caso invariante no tempo, onde será possível associar a cada matriz  $A$  sua matriz de transição de estados, sempre.

Mas antes dele vejamos o que acontece com a saída ao considerarmos relaxação inicial, isto é,  $x^0 = 0$ .

$$y(t) = C(t) \left( \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \right) + D(t) u(t)$$

Usando uma propriedade dos impulsos unitários podemos escrever

$$y(t) = C(t) \left( \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \right) + D(t) \left( \int_{t_0}^t \delta(t - \tau) u(\tau) d\tau \right)$$

ou, agrupando:

$$y(t) = \int_{t_0}^t [C(t) \Phi(t, \tau) B(\tau) + D(t) \delta(t - \tau)] u(\tau) d\tau$$

Mas é bem sabido que a entrada e a saída de um sistema linear, causal e relaxado em  $t_0$  estão relacionadas por meio da integral de superposição

$$y(t) = \int_{t_0}^t G(t, \tau) u(\tau) d\tau$$

Comparando estas duas expressões encontramos

$$G(t, \tau) = C(t) \Phi(t, \tau) B(\tau) + D(t) \delta(t - \tau)$$

Esta relação fornece a matriz de resposta ao impulso  $G(t, \tau)$  em termos das matrizes  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$ ,  $C(\cdot)$  e  $D(\cdot)$  características das equações dinâmicas. Temos assim um método de encontrar uma descrição externa a partir de uma representação interna. O problema inverso, o de encontrarmos uma equação dinâmica para um sistema modelado externamente, não é tão simples como este, e é visto na teoria das realizações.

## 4.4 Caso Linear e Invariante no Tempo

Para esta importante classe de sistemas as sutilezas desaparecem e a matriz de transição de estados pode ser obtida de uma maneira direta e simples, sem a necessidade de chutes ou tentativas nem sempre bem sucedidas.

**Teorema 4.4.1** *Quando, na equação homogênea  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$  a matriz  $A(t)$  independe do parâmetro  $t$ , isto é,  $A(t) = A = cte$ , a matriz de transição de estados é dada pela exponencial matricial*

$$\Phi(v, w) = e^{(v-w)A}$$

Seria fácil verificar que a exponencial matricial acima satisfaz todas as propriedades requeridas da matriz de transição de estados e que, assim, o teorema é verdadeiro. A principal consequência deste importante resultado aparece quando desejamos encontrar as soluções das equações dinâmicas invariantes no tempo ou fixas:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); & x(t_0) = x^0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Lembrando que nestas condições sempre podemos considerar  $t_0 = 0$ , sem perda de generalidade, teremos

$$x(t) = \sigma(t; 0; x_0; u) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau$$

A expressão para a saída segue trivialmente:

$$y(t) = Ce^{tA}x_0 + C \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Considerando nulo o estado inicial  $x_0$  na expressão acima poderíamos, a exemplo do que foi feito para o caso variante no tempo, relacionar as matrizes  $A, B, C$  e  $D$  com a integral de convolução e com a matriz de resposta ao impulso. O resultado final é

$$G(t, \tau) = Ce^{(t-\tau)A}B + D\delta(t - \tau) = G(t - \tau)$$

Encontramos, como não poderia deixar de ser, uma expressão muito particular dos parâmetros  $t$  e  $\tau$ . A resposta ao impulso depende apenas, para este caso invariante no tempo, de  $t - \tau$ , a chamada “idade” do sistema. Com isto em mente podemos considerar o impulso aplicado em  $\tau = 0$  e escrever, sem perda de generalidade:

$$G(t) = Ce^{tA}B + D\delta(t)$$

A enorme importância do caso invariante no tempo exigiria métodos simples, rápidos e eficientes para o cálculo da matriz de transição de estados. A Matemática, felizmente, conhece tais métodos para o cálculo da exponencial matricial  $e^{tA}$ . Vejamos dois deles:

1. **Método Aproximado:** Lembremo-nos de que, sendo  $a$  e  $\xi$  constantes reais, a teoria da expansão de funções em séries de potências diz que

$$e^{\xi a} = 1 + \xi a + \frac{\xi^2}{2!}a^2 + \frac{\xi^3}{3!}a^3 + \dots$$

Sendo  $A$  uma matriz  $n \times n$  uma matriz de números reais, a expressão escalar acima pode ser imediatamente generalizada, pois a potenciação é uma operação válida para as matrizes quadradas. Assim:

$$e^{\xi A} = 1 + \xi A + \frac{\xi^2}{2!} A^2 + \frac{\xi^3}{3!} A^3 + \dots$$

A aproximação será tanto melhor quanto mais termos considerarmos na soma. Este método aproximado é muito útil para cálculos efetuados em computador digital.

Ao invés de exprimir a exponencial matricial por meio de uma série truncada como acima podemos empregar o

2. **Método Exato:** consideremos uma equação homogênea invariante no tempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t); \quad x(0) = x_0$$

Sua solução pode ser encontrada por meio de Laplace:

$$sX(s) - x_0 = AX(s) \quad \text{donde} \quad X(s) = (sI - A)^{-1}x_0$$

Esta mesma solução pode também ser encontrada pelas recentes fórmulas:

$$x(t) = e^{tA}x_0 \quad \text{donde} \quad X(s) = \mathcal{L}\{e^{tA}\}x_0$$

Igualando estas duas expressões temos

$$(sI - A)^{-1}x_0 = \mathcal{L}\{e^{tA}\}x_0 \quad \text{donde} \quad [(sI - A)^{-1} - \mathcal{L}\{e^{tA}\}]x_0 = 0$$

Como esta expressão deve se verificar  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$  podemos concluir que

$$\mathcal{L}\{e^{tA}\} = (sI - A)^{-1} \quad \text{ou então} \quad e^{tA} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

A exponencial  $e^{tA}$  é a anti-transformada de Laplace da inversa da matriz polinomial  $sI - A$ . Este método é muito apreciado pela facilidade e rapidez com que apresenta uma solução exata. Esta solução, aliás, mostra uma analogia formal muito grande com o caso escalar, onde temos

$$\mathcal{L}\{e^{ta}\} = \frac{1}{s - a} = (s - a)^{-1}$$

ou então:

$$e^{ta} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - a}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{(s - a)^{-1}\}$$

Serão apenas estes os métodos vistos aqui. Para bem sedimentar as idéias vejamos um

**Exemplo 4.4.1** *Resolver a equação completa*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t); \quad x(t_0) = 0$$

Para encontrar a exponencial  $e^{tA}$  precisamos da matriz polinomial  $sI - A$ . Para este caso:

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

Inversas de matrizes como esta podem ser obtidas por qualquer dos processos conhecidos. Teremos, de um modo geral, matrizes cujos elementos são funções racionais estritamente próprias da variável  $s$ :

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Pela definição, ou então consultando tabelas, encontramos

$$e^{tA} = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Substituindo o argumento  $t$  por  $t - \tau$  chegamos à procurada

$$\Phi(t, \tau) = e^{(t-\tau)A} = \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & (t-\tau)e^{-(t-\tau)} \\ 0 & e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

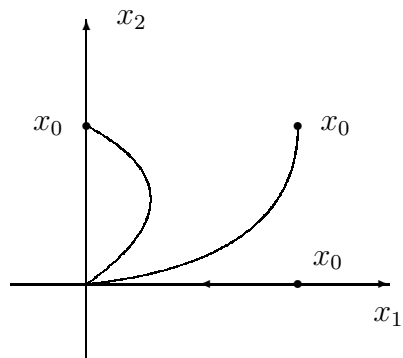
com o que podemos atacar a expressão geral da solução

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau$$

Olhando em primeiro lugar para a REN teremos

$$x(t) = e^{tA}x_0 = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}(\alpha + \beta t) \\ e^{-t}\beta \end{bmatrix}$$

Considerando separadamente várias possíveis condições iniciais podemos esboçar os tipos de trajetórias:



Para estudar a REZ, seja a entrada um degrau unitário  $u(t) = 1(t)$  e, obviamente,  $x_0 = 0$ :

$$x(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} \\ 0 \end{bmatrix} d\tau = e^{-t} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{\tau} \\ 0 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 1 - e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta trajetória poderia ser plotada; verificamos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 4.5 Equações Dinâmicas Equivalentes

Nesta parte trataremos apenas dos sistemas lineares e invariantes no tempo, representados por equações dinâmicas do tipo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); & x(0) = x^0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Muitas vezes, por economia, preguiça ou qualquer outro motivo, referimo-nos a uma equação dinâmica como esta citando apenas as matrizes que nela aparecem. Dizendo, por exemplo, que um sistema é representado pela quádrupla  $\langle A, B, C, D \rangle$  estamos subentendendo que a entrada, o estado e a saída estão relacionados da maneira usual, como acima. Com isto em mente vejamos a

**Definição 4.5.1** *As equações dinâmicas  $\langle A, B, C, D \rangle$  e  $\langle \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D} \rangle$  são chamadas de **equivalentes** quando e apenas quando existir uma matriz  $P$ ,  $n \times n$ , não singular, tal que*

$$\begin{aligned} \hat{A} &= PAP^{-1} & \hat{B} &= PB \\ \hat{C} &= CP^{-1} & \hat{D} &= D \end{aligned}$$

Esta definição de equivalência põe em jogo aspectos apenas matemáticos das equações dinâmicas. Ao nos lembrarmos de que estas equações podem representar os importantes sistemas dinâmicos lineares e invariantes no tempo nos quais tanto estamos interessados, uma dúvida surge: qual seria a relação existente entre sistemas representados por equações dinâmicas equivalentes?

Para encontrar respostas a esta questão, mais matemática se faz necessária. A ela, pois, com a sincera alegria sempre presente nessas ocasiões (e em todas as outras também, sem dúvida!).

Embora o arrazoadado seguinte seja válido para um espaço vetorial qualquer, é conveniente considerarmos o  $\mathbb{R}^n$  como o “espaço vetorial padrão”, não apenas porque ele será o espaço de estados  $\mathcal{X}$  para a grande maioria dos sistemas que nos interessam, mas também porque as visualizações ficam mais fáceis e podemos lançar mão de conceitos geométricos familiares a todos.

Um espaço vetorial é constituído por vetores, que nada mais são do que pontos de um espaço  $n$ -dimensional. Vemos assim que a identidade dos elementos de um espaço vetorial é determinada pela geometria. Mas não se pode trabalhar comodamente com pontos e nem com os elementos geométricos usuais quando a dimensão dos espaços é superior a 2. Isto impõe a necessidade de uma representação operacional mais eficiente para os vetores.

A Álgebra Linear nos diz como representar rápida e eficientemente um vetor no papel. Devemos para isso lançar mão do conceito de base. Seja então uma base do  $\mathbb{R}^n$  constituída pelos vetores  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . É bem sabido que para um elemento (ponto) qualquer  $p \in \mathbb{R}^n$  teremos

$$p = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

onde os reais  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são únicos e determinam inequivocamente o vetor  $p$ . Estes reais  $x_i$  são chamados de componentes ou coordenadas (alguns autores fazem distinção entre esses nomes) do vetor  $p$  com relação à base  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Esta correspondência biunívoca entre um vetor e suas componentes permite que um ponto qualquer de um espaço  $n$ -dimensional seja representado por um conjunto de  $n$  números reais. Por uma convenção mais ou menos generalizada estes escalares são sempre apresentados ordenadamente na forma de matriz coluna, com  $n$  linhas e uma única coluna:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Vemos assim que uma matriz coluna  $x$  pode representar um ponto (vetor) qualquer de um espaço vetorial. Com um pouco de abuso de notação diremos que a matriz coluna acima **é** o próprio vetor  $p$ :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = p$$

Na rigorosa realidade, mesmo que os elementos de uma matriz sejam os componentes de um vetor em uma dada base e, consequentemente, ela seja uma representação operacional para ele, temos em mãos entidades matemáticas fundamentalmente distintas: uma matriz é uma matriz e um vetor é um vetor. Apesar disso, o abuso cometido ao identificarmos  $p$  com sua representação matricial  $x$  é inofensivo e será sempre ignorado.

Apenas uma ressalva. A representação de vetores através de matrizes coluna é um tanto quanto antieconômica no que diz respeito a consumo de papel. Para tentar sanar esse inconveniente usa-se (não muito) a transposta de um vetor linha para simbolizar um vetor:



$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = p = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$$

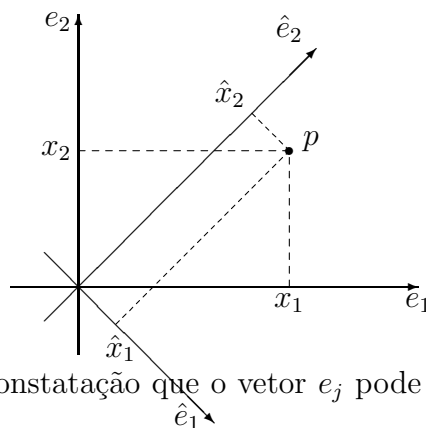
Para bem representarmos vetores por meio de matrizes foi necessário o conhecimento de uma base. Ora, é bem sabido que há um número infinito de bases em um espaço vetorial, pois qualquer conjunto de  $n$  vetores linearmente independentes pode ser selecionado como tal. Uma dúvida muito natural surge: qual é a relação entre as representações matriciais de um mesmo ponto com respeito a bases diferentes? Para atacar esse problema seja um vetor  $p \in \mathbb{R}^n$  e duas bases desse espaço denotadas por  $E = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$  e  $\hat{E} = \langle \hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n \rangle$ . Com isso temos duas possíveis expressões para  $p$ :

$$p = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \quad \text{e} \quad p = \hat{x}_1 \hat{e}_1 + \hat{x}_2 \hat{e}_2 + \dots + \hat{x}_n \hat{e}_n$$

Isto significa que o mesmo vetor  $p$  pode ser igualmente bem representado por qualquer uma das matrizes coluna abaixo:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix}$$

Antes de procurar as relações entre  $x$  e  $\hat{x}$  é bom visualizar a situação no  $\mathbb{R}^2$ :



Partindo da constatação que o vetor  $e_j$  pode ser descrito na base  $\hat{E}$  por meio de

$$e_j = p_{1j} \hat{e}_1 + p_{2j} \hat{e}_2 + \dots + p_{nj} \hat{e}_n$$

chegaríamos à tradicional conclusão da Álgebra Linear: os números reais que definem a posição do ponto com respeito à nova base são combinações lineares das antigas coordenadas:

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \cdots + p_{1n}x_n \\ \hat{x}_2 &= p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + \cdots + p_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \hat{x}_n &= p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \cdots + p_{nn}x_n\end{aligned}$$

Estas equações representam a passagem das “antigas” coordenadas para as “novas” e podem ser elegantemente descritas em notação matricial:

$$\hat{x} = Px \quad \text{onde a matriz } P \text{ é dada por} \quad \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

e  $x$  e  $\hat{x}$  são as representações do ponto  $p$  nas bases  $E$  e  $\hat{E}$ , respectivamente.

Assim como passamos da base  $E$  para a base  $\hat{E}$  através da equação acima, a mudança inversa também é possível e seria efetuada por meio de

$$x = Q\hat{x}$$

Estas expressões permitem concluir que  $P$  e  $Q$  são inversíveis e ainda mais:  $P = Q^{-1}$  ou equivalentemente,  $Q = P^{-1}$ .

Resumindo: mudanças de base são efetuadas por meio de multiplicações por matrizes não singulares. Elas podem se dar em ambos os sentidos e, se  $P$  leva de  $E$  para  $\hat{E}$ , então  $Q = P^{-1}$  será responsável pela mudança inversa, de  $\hat{E}$  para  $E$ . Como há infinitas bases em um espaço vetorial, um mesmo e único vetor pode ser representado por uma infinidade de matrizes coluna, cada uma delas podendo ser obtida a partir de outra por meio de multiplicação por uma matriz inversível.

Voltemos às equações dinâmicas que representam um sistema linear e invariante no tempo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); & x(0) = x^0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Ao escrevermos estas expressões estamos implicitamente considerando que uma dada base do espaço de estados  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$  foi selecionada, e que,

com relação a essa base, o vetor de estado é representado, no instante  $t$ , pela matriz coluna  $x(t)$ . A designação de bases nos espaços  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$  e  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^r$ , também é implícita, para que a entrada e a saída possam ser descritas, no instante  $t$ , pelas matrizes  $u(t)$  e  $y(t)$ .

Que acontecerá com as matrizes  $A, B, C$  e  $D$ , características do sistema, quando passamos da base  $E$  originalmente escolhida no espaço de estados para uma outra base  $\hat{E}$  desse espaço, permanecendo inalteradas as bases escolhidas nos espaços  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{Y}$ ? Sabemos que uma tal mudança de bases resultará em uma nova matriz coluna para representar o estado:

$$\hat{x}(t) = Px(t) \quad \text{ou então} \quad x(t) = P^{-1}\hat{x}(t)$$

Substituindo a última expressão na equação dinâmica acima vem

$$\begin{cases} P^{-1}\dot{\hat{x}}(t) = AP^{-1}\hat{x}(t) + Bu(t); & \hat{x}(0) = Px^0 \\ y(t) = CP^{-1}\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

Multiplicando a equação de estado, pela esquerda, pela matriz  $P$  vem

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = PAP^{-1}\hat{x}(t) + PBu(t); & \hat{x}(0) = Px^0 \\ y(t) = CP^{-1}\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

Deste modo, na nova base  $\hat{E}$  as relações entre  $\hat{x}(t)$ ,  $u(t)$  e  $y(t)$  passam a ser descritas por

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t); & \hat{x}(0) = Px^0 \\ y(t) = \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t) \end{cases}$$

onde

$$\hat{A} = PAP^{-1} \quad \hat{B} = PB \quad \hat{C} = CP^{-1} \quad \hat{D} = D$$

Nada foi feito que alterasse o sistema, ele continua sendo o mesmo. Quando escolhemos uma nova base em  $\mathcal{X}$  a matriz que representa o estado muda, e, com ela, mudam também as matrizes  $A, B, C$  e  $D$ , que passam a ser  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  e  $\hat{D}$ , como acima. Lembrando o conceito de equações dinâmicas equivalentes apresentado anteriormente concluímos que mudar de base no espaço de estados significa encontrar uma equação dinâmica equivalente à original. Assim, as equações dinâmicas equivalentes tem em comum a importante característica de representarem exatamente o mesmo sistema, pois

o vetor de estados permanece o mesmo, apenas passando a ser representado por um outro conjunto de números reais. Com isto as matrizes  $A, B, C$  e  $D$  podem se modificar bastante.

Dada uma equação dinâmica, ela certamente representará um único sistema linear e invariante no tempo. Já a recíproca não é verdadeira, pois como há uma infinidade de possíveis bases em um espaço vetorial, haverá um número ilimitado de equações dinâmicas equivalentes representando um mesmo sistema.

A matriz  $P$  usada na mudança de bases é chamada de **transformação de equivalência** ou **transformação de similaridade**.

**Exemplo 4.5.1** Considere o SLIT descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t); & x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

Seja a mudança de bases dada por  $\hat{x} = P_1 x$  onde a transformação de similaridade é dada por

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{cuja inversa é} \quad P_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

As matrizes  $\hat{A}, \hat{B}$  e  $\hat{C}$  devem ser calculadas através das fórmulas  $\hat{A} = P_1 A P_1^{-1}$ ,  $\hat{A} = P_1 B$  e  $\hat{C} = C P_1^{-1}$ . Feito o que encontraríamos

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 5/2 & -7/2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} u(t); & \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \\ y(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \hat{x} \end{cases}$$

Seja agora a mudança de bases dada por  $\tilde{x} = P_2 x$  onde a transformação de similaridade é dada por

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{cuja inversa é} \quad P_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

As novas matrizes  $\tilde{A}, \tilde{B}$  e  $\tilde{C}$  devem ser calculadas através das fórmulas  $\tilde{A} = P_2 A P_2^{-1}$ ,  $\tilde{A} = P_2 B$  e  $\tilde{C} = C P_2^{-1}$ . Feito o que encontraríamos

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t); & \tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x} \end{cases}$$

*Deve-se notar que esta última equação poderia ter sido obtida a partir da equação imediatamente anterior usando  $\tilde{x} = P_3\hat{x}$  com  $P_3 = P_2P_1^{-1}$ .*

**Exemplo 4.5.2** *Em páginas anteriores costumávamos encarar o problema de representar matricialmente equações diferenciais como a abaixo:*

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t) \\ y(0) = 1; \quad \dot{y}(0) = 1 \end{cases}$$

*Sabemos agora que isto significa encontrar uma equação dinâmica para um sistema descrito por meio de uma EDLOF. Utilizando ainda uma vez as “variáveis auxiliares” façamos, para este exemplo:  $x_1 = y$  e  $x_2 = \dot{y}$ . Com isto obteríamos*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t); & x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

*Outra possível escolha de variáveis auxiliares, certamente menos natural, seria  $\hat{x}_1 = y + 2\dot{y}$  e  $\hat{x}_2 = 3y + 4\dot{y}$ , que acarretaria*

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 5/2 & -7/2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} u(t); & \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \\ y(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \hat{x} \end{cases}$$

*Mais uma possível escolha:  $\tilde{x}_1 = 2y + \dot{y}$  e  $\tilde{x}_2 = -y - \dot{y}$ . Após todo o malabarismo algébrico necessário à redução chegaríamos a*

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t); & \tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x} \end{cases}$$

Os comentários e conclusões a respeito deste último exemplo são deixados a cargo da perspicácia do leitor, da qual, por certo, não escaparão as inevitáveis comparações com o exemplo anterior.

Este dois exemplos, que na realidade podem ser considerados como um único, podem não ter sido suficientes para esclarecer a questão: há alguma finalidade útil no uso das transformações de equivalência? Esta dúvida é pertinente, pois nos exemplos vistos as mudanças de base aparecem de uma

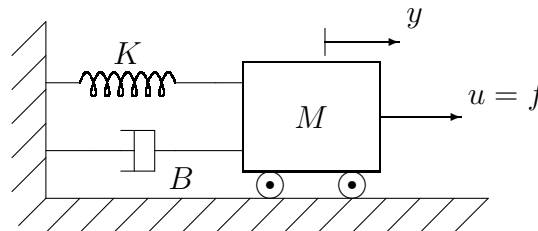
maneira muito desmotivada e artificial. Quase que por acaso era fornecida uma matriz de transformação e se apresentavam, após os cálculos devidos, as equações do sistema na nova base.

Qualquer impressão porventura pressentida de futilidade é falsa, pois na prática de sistemas lineares as transformações de equivalência são usadas de uma maneira inteligente, direta e racional, sempre tendo em vista um objetivo muito claro. A finalidade das transformações de equivalência é encontrar uma matriz  $P$  de tal modo que  $\hat{A} = PAP^{-1}$ ,  $\hat{B} = PB$  e  $\hat{C} = CP^{-1}$  estejam em formas particularmente simples, de fácil manuseio e nas quais propriedades interessantes do sistema sejam evidenciadas.

Mais uma vez notamos que um sistema não sofre alteração alguma quando submetido a uma mudança de bases. As matrizes que o representam passam a se apresentar sob diferentes aspectos, embora continuem representando as mesmas transformações lineares que caracterizam o sistema. Uma escolha esperta e inteligente de novas bases pode fornecer ao sistema “roupas diferentes” que sejam especialmente úteis para realçar este ou aquele aspecto, para deixar transparentes e visíveis detalhes estruturais, para, em suma, facilitar as coisas. A procura de bases especialmente úteis será uma preocupação sempre presente a partir de agora.

## 4.6 Equações Dinâmicas Para Sistemas Físicos

Se desejamos modelar um sistema físico por meio de equações dinâmicas o primeiro passo é a escolha das variáveis de estado. Uma diretriz muito útil diz que esta escolha deve ser feita, em geral, a partir da natureza física do sistema. Para isto escolheríamos como variáveis de estado os “depósitos” naturais de energia do sistema. Para fixar as idéias, revisitemos o sistema mecânico



Supondo elementos mecânicos ideais e ausência de atrito seco desejamos encontrar a equação dinâmica que relaciona a força  $f = u$  aplicada como entrada e o deslocamento horizontal  $y$  do carrinho.

Como a energia cinética do sistema é medida pela velocidade  $\dot{y}$  do carrinho e a energia potencial se relaciona com a compressão ou distensão da mola, medidas pela abscissa  $y$ , a escolha mais natural das variáveis de estado é  $x_1 = y$  e  $x_2 = \dot{y}$ . Supondo que os parâmetros do sistema são  $M = 1$ ,  $K = 2$  e  $B = 3$  a equação dinâmica procurada se apresentará como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t); \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

O problema de modelagem já está resolvido. A partir de agora, se não quisermos trabalhar nesta base, quer por acharmos que as matrizes estão em uma forma inconveniente, quer por uma outra razão qualquer, podemos recorrer a uma transformação de similaridade  $\hat{x} = Px$ . Como veremos brevemente, bases nas quais a matriz  $A$  apresenta forma diagonal são especialmente camaradas e, por essa razão, são extremamente desejáveis. Para este nosso caso, uma transformação diagonalizadora seria dada por

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

como bem mostram os recentes exemplos de páginas anteriores (qualquer semelhança não é mera coincidência, é mesmo proposital!). Na nova base

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t); \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \hat{x} \end{cases}$$

E pronto. Temos matrizes com formatos bastante atraentes. Apenas a ressaltar o fato de que as variáveis  $\hat{x}_i$  não apresentam, obrigatoriamente, qualquer sentido físico. Se estivermos explicitamente interessados nas energias cinética e potencial deveremos, após analisar a contento o estado na roupagem  $\hat{x}$  voltar à base original com  $x = Q\hat{x}$  onde  $Q = P^{-1}$ .

Resumindo o enredo: a formulação de um problema físico é feita de uma maneira natural, escolhendo variáveis de estado com significado físico, geralmente associadas à energia. Após esse passo escolheríamos uma outra base que acarretasse conveniência matemática e não física.

## 4.7 Aspectos Matemáticos

Veremos a seguir alguns conceitos matemáticos e suas aplicações a sistemas lineares. A enorme importância deles não deve ser subestimada ao se notar a quase frivolidade com que serão tratados. O profundo e interessante tratamento que eles bem merecem não cabe (infelizmente) nestas linhas. Deixemo-lo aos textos matemáticos.

**Definição 4.7.1** *O polinômio característico de uma matriz real e quadrada  $A$ ,  $n \times n$ , é um polinômio de grau  $n$  na variável  $s$  obtido a partir de*

$$\Delta(s) = \det(sI - A)$$

Fala-se, muitas vezes, na **equação característica** de uma matriz  $A$  como acima; trata-se da equação algébrica obtida igualando-se a zero o polinômio característico:

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = 0$$

**Definição 4.7.2** *Os autovalores de uma matriz real e quadrada  $A$ ,  $n \times n$ , são as raízes do polinômio característico:*

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ é autovalor de } A \iff \Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$$

O conjunto de todos os autovalores de uma matriz real e quadrada  $A$ ,  $n \times n$ , recebe o nome de **espectro de  $A$** , e, normalmente, o símbolo  $\lambda(A)$ :

$$\lambda(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Delta(\lambda) = 0\}$$

Apenas nos interessaremos por matrizes cujos elementos são números reais. Assim, aplicando a definição dada, verificaremos que o polinômio característico de uma matriz  $A$  é um polinômio mônico com coeficientes reais:

$$\Delta(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0; \quad \text{com } a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1$$

Um polinômio assim apresenta sempre  $n$  raízes, e, se um complexo for raiz o seu conjugado também será. Desta maneira vemos que uma matriz real  $A$ ,  $n \times n$  possuirá sempre  $n$  autovalores:

$$\lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

Consideremos um sistema linear e invariante no tempo descrito em duas bases distintas de seu espaço de estados pelas equações:



$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{array} \right. \quad \hat{x} = Px \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u \end{array} \right.$$

Sejam  $\hat{\Delta}(s)$  e  $\Delta(s)$  os polinômios característicos das matrizes  $\hat{A}$  e  $A$ , respectivamente. Estudemos as relações entre eles:

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}(s) &= \det(sI - \hat{A}) \\ &= \det(sPP^{-1} - PAP^{-1}) \\ &= \det(P(sI - A)P^{-1}) \\ &= (\det P) \det(sI - A) (\det P^{-1}) \\ &= \det(sI - A) \\ &= \Delta(s) \end{aligned}$$

O importante significado disto é que o polinômio característico não muda ao mudarmos de base. O polinômio característico, e, conseqüentemente, os autovalores, permanece inalterado ao efetuarmos uma transformação de equivalência qualquer. Por esta razão, tanto  $\Delta(s)$  quanto os autovalores  $\lambda_i$  de uma matriz  $A$  são grandezas chamadas **invariantes**. Elas são características do sistema e independem da particular base escolhida.

Emprestemos da Matemática ainda outro conceito de enorme utilidade em nossos estudos. Sendo  $A$  uma matriz real e quadrada,  $n \times n$ , e  $\lambda$  um de seus autovalores, chamaremos de **autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda$**  a um vetor  $v \in \mathbb{R}^n$  com a seguinte propriedade:

$$Av = \lambda v$$

Ou seja, a imagem de um autovetor por meio de  $A$  deve ser um múltiplo dele mesmo, deve estar na mesma direção, na mesma reta suporte. Seja  $v$  um autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda$ . Sendo  $\alpha \in \mathbb{R}$  um escalar qualquer verificaríamos facilmente que  $w = \alpha v$  também é um autovetor de  $A$  associado ao mesmo autovalor, isto é,  $Aw = \lambda w$ . Na realidade há um número infinito de autovetores de  $A$  associados a um dado autovalor  $\lambda$ : eles pertencem a um mesmo subespaço vetorial que será usualmente determinado pelo fornecimento de apenas um de seus elementos.

**Exemplo 4.7.1** *Seja a matriz  $A$ , com seu polinômio característico:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \Delta(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ -4 & s-3 \end{bmatrix} = s^2 - 4s - 5$$

Este polinômio tem duas raízes reais e distintas  $\lambda_1 = 5$  e  $\lambda_2 = -1$ . Em outras palavras, o espectro de  $A$  é dado por  $\lambda(A) = \{-1; 5\}$ . Para calcular  $v_1$ , o autovetor associado a  $\lambda_1 = 5$  consideremos  $v_1 = [\alpha \ \beta]^T$ . Impondo a condição  $Av_1 = \lambda_1 v_1$  temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \text{ou então,} \quad \begin{cases} \alpha + 2\beta = 5\alpha \\ 4\alpha + 3\beta = 5\beta \end{cases}$$

Estas equações forneceriam a relação  $\beta = 2\alpha$ , ou seja,

$$v_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Qualquer múltiplo do vetor  $[1 \ 2]^T$  é um autovetor associado a  $\lambda_1 = 5$ . O conjunto de todos estes múltiplos é, geometricamente, uma reta que passa pela origem e pelo ponto  $[1 \ 2]^T$ . Chamando esta reta de  $\mathcal{V}_1$  temos

$$\mathcal{V}_1 = \{v_1 \mid Av_1 = \lambda_1 v_1\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

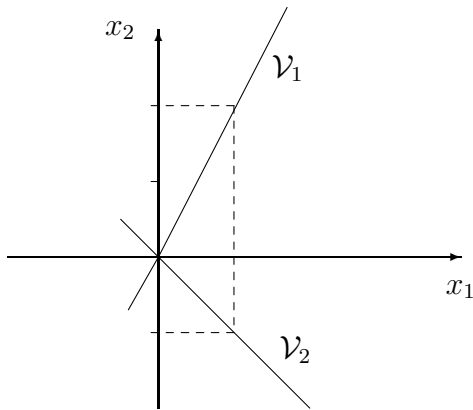
Sendo  $v_2 = [\gamma \ \delta]^T$  temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \quad \text{ou então,} \quad \begin{cases} \gamma + 2\delta = -\gamma \\ 4\gamma + 3\delta = -\delta \end{cases}$$

Estas equações forneceriam a relação  $\gamma = -\delta$ , ou seja,

$$v_2 = \begin{bmatrix} \gamma \\ -\gamma \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Uma representação gráfica da geometria envolvida é possível:



### 4.7.1 Equações Homogêneas

Na descrição padronizada de sistemas lineares a que estamos acostumados as matrizes  $B, C$  e  $D$  são apenas ligações do estado do sistema com o exterior. Elas mostram como a entrada afeta o estado, em que pontos do sistema ela atua, e como o sistema age no meio ambiente, através da saída. O comportamento íntimo e isolado do sistema, as importantes relações do estado com ele mesmo, são descritas pela equação homogênea:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Os importantes conceitos de álgebra matricial recém vistos encontram muita utilidade no estudo da equação homogênea. Para nos certificarmos disso lembremo-nos de que a solução dela, a REN, é dada por

$$x(t) = e^{tA}x_0 \quad \text{ou, laplaceando,} \quad X(s) = (sI - A)^{-1}x_0$$

Aplicando a definição de matriz inversa:

$$X(s) = \frac{1}{\Delta(s)}(sI - A)^+x_0$$

onde  $\Delta(s) = \det(sI - A)$  é o polinômio característico de  $A$  e  $(sI - A)^+$  é a transposta da matriz dos cofatores de  $sI - A$ , também conhecida como matriz adjunta. Raciocinemos juntos: os elementos da matriz  $sI - A$  que se quer inverter são números reais, com exceção daqueles sobre a diagonal principal que serão polinômios do primeiro grau do tipo  $s - a_{ii}$ . Deve estar claro, a partir disto, que os elementos da adjunta  $(sI - A)^+$  serão polinômios em  $s$  cujos graus jamais excederão  $n - 1$ . Assim,  $(sI - A)^+$  será uma matriz polinomial  $n \times n$  e  $(sI - A)^+x_0$  será uma matriz coluna  $L(s)$  cujos elementos são polinômios com graus  $n - 1$ , no máximo:

$$X(s) = \frac{1}{\Delta(s)}(sI - A)^+x_0 = \frac{L(s)}{\Delta(s)}$$

Supondo que os autovalores de  $A$  são reais e distintos, seu polinômio característico pode ser fatorado e a expressão acima pode ser expandida em uma soma de frações parciais:  $X(s) =$

$$\frac{L(s)}{\Delta(s)} = \frac{L(s)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)} = \frac{L_1}{s - \lambda_1} + \frac{L_2}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{L_n}{s - \lambda_n}$$

onde os  $L_i$  são vetores constantes, isto é,  $L_i \in \mathbb{R}^n$ . Achando a antitransformada de Laplace teremos

$$x(t) = L_1 e^{\lambda_1 t} + L_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + L_n e^{\lambda_n t}$$

Estudemos mais detalhadamente esta última expressão. Derivando-a vem

$$\dot{x}(t) = \lambda_1 L_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 L_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \lambda_n L_n e^{\lambda_n t}$$

Mas como  $x(t)$  é uma solução da equação homogênea devemos ter  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \lambda_1 L_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 L_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \lambda_n L_n e^{\lambda_n t} \\ &= AL_1 e^{\lambda_1 t} + AL_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + AL_n e^{\lambda_n t} = Ax(t) \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$(AL_1 - \lambda_1 L_1) e^{\lambda_1 t} + (AL_2 - \lambda_2 L_2) e^{\lambda_2 t} + \dots + (AL_n - \lambda_n L_n) e^{\lambda_n t} = 0$$

Como as exponenciais  $e^{\lambda_i t}$  são funções linearmente independentes a expressão acima se anula se e somente se

$$AL_i - \lambda_i L_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Isto significa que  $AL_i = \lambda_i L_i$ , ou seja, os coeficientes  $L_i$  são autovetores de  $A$  associados aos autovalores  $\lambda_i$ . Assim, em geral, quando os autovalores de  $A$  são reais e distintos a solução da equação homogênea pode ser expressa como

$$x(t) = v_1 e^{\lambda_1 t} + v_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + v_n e^{\lambda_n t} = \sum_{i=1}^n v_i e^{\lambda_i t}$$

Esta maneira alternativa de apresentar a solução da equação homogênea é muito interessante pois evidencia o fato de que  $x(t)$  é uma soma de exponenciais caracterizada pelos autovalores, soma esta ponderada pelos autovetores

$$x(t) = \sum_{i=1}^n v_i e^{\lambda_i t} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \lambda_i \rightarrow \text{autovalor de } A \\ v_i \rightarrow \text{autovetor de } A \end{cases}$$

A grandeza  $v_i e^{\lambda_i t}$  é muitas vezes chamada de **i-ésimo modo natural**, ou modo natural associado ao autovalor  $\lambda_i$ . Quando o estado inicial  $x_0$  não é especificado o autovetor  $v_i$  também não será, podendo assumir qualquer valor no conjunto  $\mathcal{V}_i$  anteriormente definido. Por outro lado, se a condição inicial  $x_0$  é bem definida os  $v_i$  também o serão.

**Exemplo 4.7.2** Considere a equação homogênea

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} x(t); \quad x(0) = x_0$$

Como os autovalores e autovetores de  $A$  já foram calculados no exercício anterior podemos escrever

$$x(t) = v_1 e^{\lambda_1 t} + v_2 e^{\lambda_2 t} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{5t} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Os escalares  $\alpha$  e  $\gamma$ , indeterminados, traduzem o fato de que os autovetores não são únicos. Ao escolhermos uma condição inicial conseguiremos determiná-los, ou melhor, escolher elementos  $v_1$  e  $v_2$  dentre os vetores dos subespaços  $\mathcal{V}_1$  e  $\mathcal{V}_2$ . Seja, por exemplo,  $x_0 = [2 \ 1]^T$ . Fazendo  $t = 0$  na expressão geral de  $x(t)$  vem

$$x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^0 + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^0 \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \alpha + \gamma = 2 \\ 2\alpha - \gamma = 1 \end{cases}$$

Estas equações fornecem  $\alpha = \gamma = 1$  e assim a solução para o estado inicial  $x_0 = [2 \ 1]^T$  será

$$x_I(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{5t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

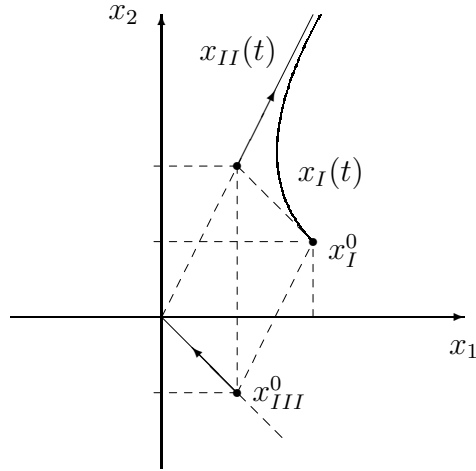
Há condições iniciais que “filtram” alguns modos, excitando apenas outros. Queremos dizer com isso que, dependendo da escolha de  $x_0$ , poderemos selecionar as exponenciais que aparecerão na resposta. Seja, por exemplo,  $x_0 = [1 \ 2]^T$ . O mesmo procedimento aplicado acima levaria a  $\alpha = 1$  e  $\gamma = 0$ :

$$x_{II}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{5t}$$

Colocando agora  $x_0 = [1 \ -1]^T$  os cálculos gerariam  $\alpha = 0$  e  $\gamma = 1$ :

$$x_{III}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

As trajetórias de estado correspondentes às três soluções acima encontradas são esboçadas no desenho abaixo:



A condição inicial  $x_{III}^0$  excita apenas o segundo modo natural, donde a trajetória correspondente é constituída apenas pela exponencial  $e^{-t}$ . O estado inicial  $x_{II}^0$  dará início a uma trajetória onde apenas o autovalor  $\lambda_1 = 5$  aparece na exponencial. Já  $x_I^0$  originará uma solução onde ambos os modos estão presentes. O leitor deve verificar (o que pode ser feito facilmente) que o formato das soluções é realmente o mostrado acima.

É importante notar que quando o estado inicial  $x_0$  é colocado em um subespaço  $\mathcal{V}_i$  apenas o modo natural  $v_i e^{\lambda_i t}$ , associado a este subespaço, será excitado, sendo os outros modos filtrados, impedidos de aparecer na solução:

$$\text{Se } x_0 \in \mathcal{V}_i \quad \text{então} \quad x(t) = v_i e^{\lambda_i t}$$

E temos mais, pois nesses casos a trajetória ficará restrita ao subespaço  $\mathcal{V}_i$ :

$$\text{Se } x_0 \in \mathcal{V}_i \quad \text{então} \quad x(t) \in \mathcal{V}_i \quad \forall t$$

Está explicado porque as trajetórias *II* e *III* do exemplo anterior são retilíneas: elas nascem e devem permanecer sempre prisioneiras dos conjuntos  $\mathcal{V}_1$  e  $\mathcal{V}_2$ , que são retas do  $\mathbb{R}^2$ .

Em espaços de estado com dimensões maiores do que 2 estas idéias podem ser generalizadas. Sendo por exemplo  $\mathcal{V}$  o subespaço obtido pela soma dos autovetores  $\mathcal{V}_i$ ,  $\mathcal{V}_j$  e  $\mathcal{V}_k$  teremos

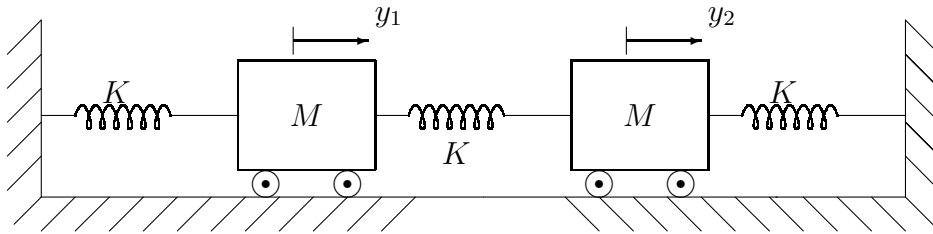
$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_i + \mathcal{V}_j + \mathcal{V}_k$$

Se  $x_0 \in \mathcal{V}$  então  $x(t) \in \mathcal{V} \forall t$ . Temos ainda que apenas os modos naturais  $i, j$  e  $k$  seriam excitados.

Todas estas idéias podem ser demonstradas, de uma maneira bastante simples até. Isto não será feito aqui, onde apelaremos ainda uma vez à credulidade do leitor. Não será a última vez.

Toda a discussão acima é baseada na hipótese de autovalores reais e distintos. Se houver no espectro de  $A$  valores complexos conjugados a essência dos conceitos permanece a mesma, apenas alguns detalhes sofrerão modificações, como pode ser visto através de um

**Exemplo 4.7.3** As chamadas “oscilações livres” de um sistema mecânico como o abaixo esquematizado são os movimentos causados pelas condições iniciais.



O modelo matemático para este sistema poderia ser encontrado de maneira simples:

$$\begin{cases} M\ddot{y}_1(t) + 2K\dot{y}_1(t) = Ky_2(t) \\ M\ddot{y}_2(t) + 2K\dot{y}_2(t) = Ky_1(t) \end{cases}$$

Escolhendo como variáveis de estado  $x_1 = y_1$ ,  $x_2 = y_2$ ,  $x_3 = \dot{y}_1$ ,  $x_4 = \dot{y}_2$  e supondo  $K/M = 1$  encontramos a seguinte equação dinâmica:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) = Ax(t); \quad x(0) = x^0$$

Como a dimensão do sistema é 4 a expressão básica para a solução será

$$x(t) = v_1 e^{\lambda_1 t} + v_2 e^{\lambda_2 t} + v_3 e^{\lambda_3 t} + v_4 e^{\lambda_4 t}$$

Calculemos pois os autovalores e autovetores de  $A$ . Para isso:

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = s^4 + 4s^2 + 3$$

cujas raízes comporão o espectro de  $A$ :

$$\lambda_1 = j; \quad \lambda_2 = -j; \quad \lambda_3 = j\sqrt{3}; \quad \lambda_4 = -j\sqrt{3}$$

A solução fica

$$x(t) = v_1 e^{jt} + v_2 e^{-jt} + v_3 e^{j\sqrt{3}t} + v_4 e^{-j\sqrt{3}t}$$

Lembrando a identidade trigonométrica  $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$  podemos eliminar as exponenciais da expressão de  $x(t)$ . Resulta

$$x(t) = (v_1 + v_2) \cos t + (v_1 - v_2)j \sin t + (v_3 + v_4) \cos \sqrt{3}t + (v_3 - v_4)j \sin \sqrt{3}t \quad (4.1)$$

Aplicando o procedimento conhecido para o cálculo dos autovetores encontrariamos

$$v_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ j \\ j \end{bmatrix}; \quad v_2 = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -j \\ -j \end{bmatrix}; \quad v_3 = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{3}j \\ -\sqrt{3}j \end{bmatrix}; \quad v_4 = \delta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{3}j \\ \sqrt{3}j \end{bmatrix}$$

Antes de entrarmos com estes valores na expressão (4.1) acima é conveniente estudar a natureza de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$ . Para isto basta analisar a própria equação (4.1) quando  $t = 0$  (qualquer outro valor serviria, mas este facilita as coisas). Temos

$$x(0) = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$$

ou, escrevendo as componentes:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \beta + \gamma + \delta \\ \alpha + \beta - (\gamma + \delta) \\ j(\alpha - \beta) + \sqrt{3}j(\gamma - \delta) \\ j(\alpha - \beta) - \sqrt{3}j(\gamma - \delta) \end{bmatrix}$$

Todas estas componentes de  $x(0)$  devem ser reais, pois representam grandezas físicas. O mesmo raciocínio se aplica a somas destas componentes; tomando, por exemplo,  $x_3(0) + x_4(0)$ :

$$x_3(0) + x_4(0) = j2(\alpha - \beta) = \text{real}$$

Isto será possível apenas se  $\alpha - \beta$  for um número imaginário puro:

$$\alpha - \beta = jb \quad \text{onde} \quad b \in \mathbb{R}$$

Raciocinando analogamente para  $x_3(0) - x_4(0)$  concluiríamos que  $\gamma - \delta$  é também um imaginário puro:



$$\gamma - \delta = jd \quad \text{onde} \quad d \in \mathbb{R}$$

Impondo as condições de  $x_1(0) + x_2(0)$  e, posteriormente,  $x_1(0) - x_2(0)$  serem grandezas reais concluímos que  $\alpha + \beta$  e  $\gamma + \delta$  são números reais:

$$\alpha + \beta = a \in \mathbb{R} \quad \gamma + \delta = c \in \mathbb{R}$$

Tais restrições serão satisfeitas simultaneamente apenas quando  $\alpha$  e  $\beta$  e também  $\gamma$  e  $\delta$  forem pares complexos conjugados. Tendo em vista esta peculiaridade podemos escrever

$$v_1 + v_2 = \begin{bmatrix} a \\ a \\ -b \\ -b \end{bmatrix} \quad v_1 - v_2 = \begin{bmatrix} jb \\ jb \\ ja \\ ja \end{bmatrix} \quad v_3 + v_4 = \begin{bmatrix} c \\ -c \\ -d\sqrt{3} \\ d\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad v_3 - v_4 = \begin{bmatrix} jd \\ -jd \\ jc\sqrt{3} \\ -jc\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Estes valores podem ser substituídos na equação (4.1) levando, finalmente, a uma expressão concisa e geral:

$$x(t) = \begin{bmatrix} a \\ a \\ -b \\ -b \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} b \\ b \\ a \\ a \end{bmatrix} \sin t + \begin{bmatrix} c \\ -c \\ -d\sqrt{3} \\ d\sqrt{3} \end{bmatrix} \cos(\sqrt{3}t) - \begin{bmatrix} d \\ -d \\ c\sqrt{3} \\ -c\sqrt{3} \end{bmatrix} \sin(\sqrt{3}t)$$

Os reais  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  serão determinados apenas quando a condição inicial for especificada. Se, por exemplo, impusermos  $x(0) = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$  teríamos  $a = 1$ ,  $b = c = d = 0$  o que acarreta

$$x(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \cos t \\ -\sin t \\ -\sin t \end{bmatrix}$$

Lembrando a escolha das variáveis de estado ( $x_1 = y_1$ ,  $x_2 = y_2$ , etc) chegamos à conclusão que  $y_1(t) = y_2(t) \ \forall t$  e  $\dot{y}_1(t) = \dot{y}_2(t) \ \forall t$ . Isto significa que o movimento dos carrinhos é exatamente o mesmo: eles oscilam paralelamente em um movimento harmônico simples de frequência igual a 1.

Escolhendo  $x(0) = [0 \ 0 \ 1 \ 1]^T$  ou então  $x(0) = [1 \ -1 \ 0 \ 0]^T$  ou ainda  $x(0) = [0 \ 0 \ 1 \ -1]^T$  encontraríamos outras soluções com interpretações físicas muito simples e interessantes em termos dos modos naturais de vibração do sistema.

Nesta caso de autovalores e autovetores complexos os subespaços  $\mathcal{V}_i$  não tem um significado simples e intuitivo como anteriormente.

## 4.7.2 Aspectos freqüenciais

## 4.7.3 Forma de Jordan

Seja novamente a equação homogênea em estudo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Considerando ainda autovalores reais e distintos sabemos que os autovetores de  $A$  serão linearmente independentes. Seja  $Q$  a matriz  $n \times n$  cujas colunas são estes autovetores:

$$Q = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n] \quad \text{onde} \quad Av_i = \lambda_i v_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Esta matriz será inversível, e poderemos fazer uma mudança de coordenadas usando como base a formada pelos autovetores:  $x = Qx^*$ . Com isto

$$\begin{cases} \dot{x}^* = A^* x^* \\ x^*(0) = x_0^* \end{cases} \quad \text{onde} \quad A^* = Q^{-1}AQ$$

Para determinar o formato de  $A^*$  consideremos que a equação de definição de  $A^*$ , dada acima, pode ser reescrita como  $AQ = QA^*$ . Explicitando a estrutura de colunas de  $Q$  vem

$$A[v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n] = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]A^*$$

Igualando as colunas destas duas matrizes:

$$\begin{aligned} Av_1 &= a_{11}^* v_1 + a_{21}^* v_2 + \cdots + a_{n1}^* v_n \\ Av_2 &= a_{12}^* v_1 + a_{22}^* v_2 + \cdots + a_{n2}^* v_n \\ &\vdots \\ Av_n &= a_{1n}^* v_1 + a_{2n}^* v_2 + \cdots + a_{nn}^* v_n \end{aligned}$$

Como os  $v_i$  são autovetores temos  $Av_k = \lambda_k v_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$  e, consequentemente:

$$a_{ii}^* = \lambda_i \quad \forall i \quad \quad a_{ij}^* = 0 \quad \forall i, j \quad i \neq j$$

E a matriz  $A^*$ , desta maneira, apresenta uma forma diagonal:

$$A^* = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag } \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

Na nova base (cujas coordenada não tem, necessariamente, algum sentido físico) as variáveis de estado são completamente desacopladas umas das outras:

$$\dot{x}_1^* = \lambda_1 x_1^*; \quad \dot{x}_2^* = \lambda_2 x_2^*; \quad \dots$$

Nesta base o sistema dinâmico de dimensão  $n$  pode ser considerado como a justaposição de  $n$  sistemas de primeira ordem, independentes uns dos outros. É desnecessário dizer que a análise de sistemas com equações dinâmicas homogêneas no formato diagonalizado acima é extremamente simples e direta. Sempre que possível devemos procurar transformações diagonalizadoras com o auxílio dos autovetores. Mesmo com a desvantagem de a nova base não ter necessariamente um significado físico para as variáveis de estado, a simplicidade e a transparência da forma diagonal seriam suficientes para recomendá-la na maioria das situações.

Em um contexto mais geral, sem restrições ao caso homogêneo, diremos que uma equação dinâmica representada pelas matrizes  $\langle A, B, C, D \rangle$  onde  $A$  é diagonal encontra-se na **Forma de Jordan**.

Um dos resultados mais importantes da Álgebra Linear reza que, se uma equação dinâmica  $\langle A, B, C, D \rangle$  não está na forma de Jordan é sempre possível encontrar uma mudança de bases  $x = Qx^*$  tal que, na nova base, as matrizes  $\langle A^*, B^*, C^*, D^* \rangle$  apresentam-se em Jordan. É preciso ter em mente que a presença de autovalores repetidos pode acarretar uma forma de Jordan onde  $A^*$  não é perfeitamente diagonal.

No caso de autovalores reais e distintos a transformação de equivalência que coloca em Jordan é uma matriz  $Q$  cujas colunas são os autovetores de  $A$ . No caso de autovalores repetidos deve-se apelar para os autovetores “generalizados”.

E para mais detalhes sobre estes importantes aspectos, aos textos de Álgebra Linear devemos ir, pois aqui e agora o palco se deve esvaziar para a entrada em cena, com garbo e imponência, das próximas estrelas do espetáculo:

# Capítulo 5

## Controlabilidade e Observabilidade

Tenho notas não tecadas

## Capítulo 6

# Realimentação de Estados e Síntese via Observadores

Tenho notas já tecadas