

# Sumário

<b>1</b>	<b>Mundo Discreto</b>	<b>1</b>
1.1	Sinais Discretos Determinísticos . . . . .	1
1.2	Transformada em $z$ de uma Sequência . . . . .	4
1.3	Propriedades da transformada $z$ . . . . .	6
1.4	Transformada Inversa . . . . .	10
1.4.1	Método aberto . . . . .	11
1.4.2	Método fechado . . . . .	12
1.5	Operadores e Sistemas Discretos . . . . .	14
1.5.1	Resposta ao impulso . . . . .	14
1.5.2	Solução por transformada $Z$ . . . . .	17
1.5.3	Função de Transferência Discreta . . . . .	19
1.5.4	Comportamento temporal . . . . .	19
1.5.5	Estabilidade . . . . .	22
1.5.6	Pequena pausa. . . . .	22
1.6	Sistemas Discretos . . . . .	23
1.6.1	Um sistema discreto real . . . . .	23
1.6.2	Equações de diferenças . . . . .	24
1.6.3	Equações Dinâmicas Discretas . . . . .	29
1.7	Realizações . . . . .	33
1.8	Exercícios . . . . .	40
<b>2</b>	<b>Conexões com o mundo contínuo</b>	<b>47</b>
2.1	Desperdício e economia . . . . .	47
2.2	Amostragem Pulsada e Geral . . . . .	49
2.3	Amostragem Pulsada, Impulsiva e Instantânea . . . . .	55
2.4	Aspectos Importantes da Amostragem . . . . .	60
2.5	Uso de Sistemas Discretos . . . . .	62
2.5.1	Substitutos Discretos . . . . .	65
2.5.2	Integração numérica . . . . .	65
2.5.3	Substitutos discretos aproximados . . . . .	69
2.6	Sinais quantizados e digitais . . . . .	70

2.7	Conversão de sinais . . . . .	73
<b>3</b>	<b>Controle e Controle Digital . . . . .</b>	<b>78</b>
3.1	Projetos Digitais de Controladores . . . . .	80
3.2	Projeto Analógico . . . . .	81
3.2.1	A solução ideal e o mapeamento de pólos e zeros . . . . .	83
3.2.2	Métodos Retangulares: Euler atrasado . . . . .	88
3.2.3	Métodos Retangulares: Euler avançado . . . . .	91
3.2.4	Método Trapezoidal: Newton-Raphson . . . . .	93
3.2.5	Método da Equivalência ao Degrau . . . . .	96
3.2.6	Discretização no Espaço de Estados . . . . .	98
3.2.7	Escolha do Período de Amostragem . . . . .	103
3.3	Projeto Digital . . . . .	104
3.3.1	Bloqueadores de Ordem Zero . . . . .	106
3.3.2	Que Acontece a Pólos e Zeros? . . . . .	113
3.4	Exercícios . . . . .	117

# Capítulo 1

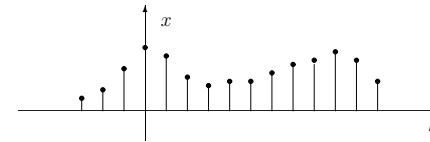
## Mundo Discreto

### 1.1 Sinais Discretos Determinísticos

Este capítulo tratará apenas dos sinais discretos e determinísticos, e assim a palavra *sinais*, isoladamente, será usada para designá-los. Conforme visto no capítulo ... as funções reais da variável inteira e discreta  $k$ , o “tempo discreto”, são os instrumentos matemáticos adequados para representar tais sinais. Estas funções são conhecidas usualmente como **seqüências de números reais**, ou simplesmente **seqüências reais**. Deste modo diremos que um sinal  $x$  pode ser representado pela notação matemática clássica para seqüências:

$$\begin{aligned} x : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ k &\mapsto x(k) \end{aligned}$$

A esta simbologia sempre se deve associar uma representação gráfica do sinal, ou seja, o gráfico da função:



Muitas vezes representamos uma seqüência pela notação  $\{x(k)\}$  ou simplesmente por  $\{x\}$ , ou apenas pelo símbolo  $x$ . Qualquer destas notações representa o sinal como um todo, ou seja, uma seqüência definida para qualquer valor inteiro do “tempo”  $k$ , e à qual sempre se associa um gráfico, como acima. Também se usa o símbolo  $x_k$  ou ainda  $x[k]$  para denotar uma

seqüência, mas deve haver um certo cuidado aqui, para evitar confusões com o valor assumido pela seqüência  $x$  no instante  $k$ .

Algumas vezes o conhecimento que temos do sinal permite apenas que ele seja representado por um gráfico, como acima, ou então por uma lista ou tabela de valores:

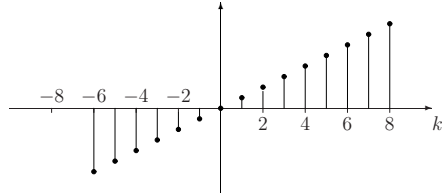
$$\dots \quad x(-2), \quad x(-1), \quad x(0), \quad x(1), \quad x(2), \quad x(3) \quad \dots$$

A situação mais desejável é quando existe uma expressão analítica para a seqüência  $x$ : quando, por exemplo, sabemos que  $x(k) = k^2 - 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ .

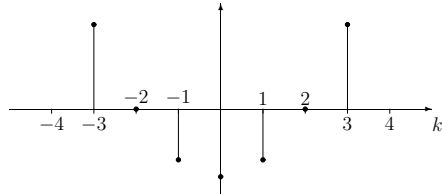
Ao invés de seqüências de números reais podemos estender o conceito para seqüências de vetores:

$$\begin{aligned} \{x\} : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ k \in \mathbb{Z} &\mapsto x(k) \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

**Exemplo 1.1.1** *Seja a seqüência  $\{x\} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por  $k \mapsto x(k) = k/2 \quad \forall k$ ; teremos  $\{x\} = \{\dots -1/2 ; 0 ; 1/2 ; 1 \dots\}$  ou, graficamente:*



*Para a seqüência  $\{x\} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$  com  $k \mapsto x(k) = -2 + k^2/2 \quad \forall k$ ; teremos  $\{x\} = \{\dots -3/2 ; -2 ; -3/2 ; -1 \dots\}$  ou, graficamente:*



*Seja agora a seqüência vetorial  $\{x\} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}^2$  com*

$$k \mapsto x(k) = \begin{bmatrix} e^k \\ k \end{bmatrix} \quad \forall k$$

- Encontre, por tentativa e erro, um valor de  $T$  que faz com que este controle discreto seja uma boa aproximação para o analógico.
- Usando o “melhor” valor de  $T$  encontrado anteriormente discretize a planta e faça todo o projeto de modo discreto. Os autovalores desejados para o sistema devem vir da aplicação da relação fundamental aos autovalores contínuos. Já para o observador, use uma dinâmica dead-beat.
- Compare as soluções discretas obtidas. Qual é a melhor? Qual é mais fácil de obter?

18. Um pêndulo invertido com base circular é descrito pelas equações

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 11.6583 & -0.0228 & -8.7437 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ -17.4874 & -0.0342 & 200.6156 & 0.0000 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 2.7324 \\ 0.0000 \\ -4.0986 \end{bmatrix} u$$

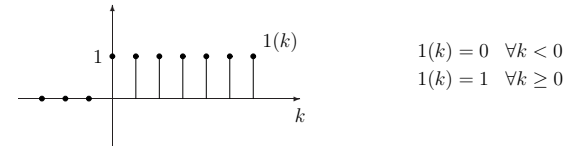
$$y = [1 \ 1 \ 1 \ 1]x$$

- Calcular os autovalores de  $A$  e plotar as curvas para as variáveis de estado  $x_i$  e a saída  $y$  quando a entrada  $u$  é nula e a condição inicial é  $x_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$
  - Encontrar uma realimentação de estados que coloca os autovalores de  $A + BF$  em  $-14.3090 \pm j1.1050$  e  $-5.3310 \pm j2.5690$
  - Supondo que todos os estados são mensuráveis implemente simule a lei de controle  $u(t) = Fx(t)$  e plote as variáveis de estado  $x_i$  e a saída  $y^a(t)$  para as mesmas condições
  - Agora os estados não são mensuráveis. Projete um observador com pólos (todos) em  $-10$ , implemente a lei de controle  $u(t) = Fx(t)$  e plote  $y_{-10}^a(t)$ , a resposta da malha fechada por observador. Plote também o erro dado por  $y^a(t) - y_{-2}^a(t)$  e verifique a qualidade da estimação de estados.
  - Se o observador anterior for muito lento refaça o item anterior para pólos em outros lugares, até encontrar algo satisfatório.
  - O observador encontrado por esse processo e a realimentação  $F$  constituem a solução analógica que deve ser discretizada e simulada. Encontre, por tentativa e erro, um valor de  $T$  que faz com que este controle discreto seja uma boa aproximação para o analógico.
  - Usando o “melhor” valor de  $T$  encontrado anteriormente discretize a planta e faça todo o projeto de modo discreto. Os autovalores desejados para o sistema devem vir da aplicação da relação fundamental aos autovalores contínuos. Já para o observador, use uma dinâmica dead-beat.
  - Compare as soluções discretas obtidas. Qual é a melhor? Qual é mais fácil de obter?
19. Considere o pêndulo invertido com base circular analisado no trabalho. O observador e a realimentação  $F$  encontrados anteriormente constituem a solução analógica que deve ser discretizada e simulada.

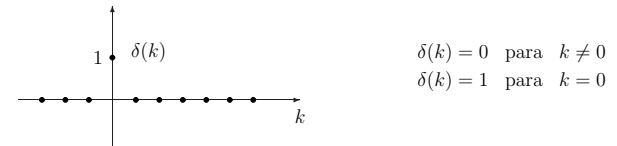
Esta sequência poderia ser visualizada como uma sucessão de 5 pontos no plano  $\mathbb{R}^2$ .

Algumas seqüências serão particularmente importantes para nós:

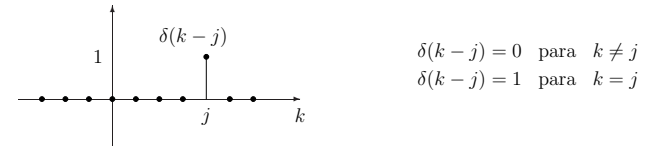
- Degrau unitário discreto** designada por  $1(k)$  e definida como 1 para  $k \geq 0$  e 0 para  $k < 0$ :



- Impulso unitário discreto**, ou função **delta de Kronecker**, designada por  $\delta(k)$  e definida como 1 para  $k = 0$  e 0 para  $k \neq 0$ :

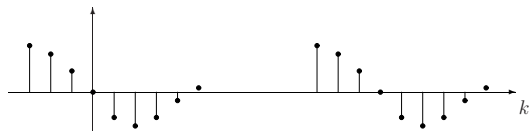


- Impulso unitário deslocado**, designado por  $\delta(k-j)$  e definida como 1 para  $k = j$  e 0 para  $k \neq j$ :



- Seqüência geral deslocada:** sendo  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  uma seqüência definida por  $k \mapsto f(k)$  a seqüência deslocada  $j$  instantes é definida como

$$Q_j f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{com} \quad Q_j f(k) = f(k-j)$$



## 1.2 Transformada em $z$ de uma Seqüência

Lembramos mais uma vez que o paralelismo com o caso contínuo é quase total: a transformada de Laplace e todo o seu extraordinário poder simplificador encontram correspondência no campo discreto.

A transformada em  $z$  de uma seqüência  $x(k)$ , denotada por  $\mathcal{Z}\{x(k)\}$ , ou simplesmente por  $\mathcal{Z}\{x\}$  é uma série:

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

Normalmente estas séries tem uma forma fechada, isto é, elas convergem, podem ser expressas por uma expressão analítica compacta:

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = X(z)$$

Assim, a transformada em  $z$  de uma seqüência  $x(k)$  é uma função complexa da variável complexa  $z$  denotada por  $X(z)$ . Para quem gosta de matematiqüês, sendo

$$\mathcal{X} = \{x : Z \rightarrow \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\}$$

as famílias de todas as seqüências reais e de todas as funções complexas de variável complexa, a transformada em  $z$  seria denotada pelo mapeamento

$$\mathcal{Z} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$$

com lei de associação dada por

$$x(k) \mapsto X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

A título de exemplos, vamos calcular algumas transformadas importantes que deverão ser memorizadas:

14. Ainda o mesmo problema. A solução vista no problema (10) pode ser melhorada: mantendo a mesma rapidez ( $T_r$ ) e preservando P.O.  $< 5\%$  podemos diminuir  $T_s$ . Mostre o par de pólos correspondentes a esta solução melhorada. É possível atingi-los por realimentação de saída?
15. Encontre uma realização para  $P(s)$  e calcule a realimentação de estados  $F$  que coloca os autovalores de  $A + BF$  nos pólos “melhorados” do exercício anterior.
  - (a) Supondo que todos os estados são mensuráveis implemente (via simulação, claro) a lei de controle  $u(t) = Fx(t) + r(t)$  e plote  $y^a(t)$ , a resposta da malha fechada a um degrau.
  - (b) Agora os estados não são mensuráveis. Projete um observador com pólos (ambos) em  $-2$ , implemente a lei de controle  $u(t) = Fx(t) + r(t)$  e plote  $y_{-2}^a(t)$ , a resposta da malha fechada por observador a um degrau. Plote também o erro dado por  $y^a(t) - y_{-2}^a(t)$  e verifique a qualidade da estimação de estados.
  - (c) Se o observador anterior for muito lento refaça o item anterior para pólos em  $-3$ , ou  $-4$ , etc, até encontrar algo satisfatório.
  - (d) O observador encontrado por esse processo e a realimentação  $F$  constituem a solução analógica que deve ser discretizada e implementada (simulada, pessoal) digitalmente. Encontre, por tentativa e erro, um valor de  $T$  que faz com que este controle discreto seja uma boa aproximação para o analógico.
  - (e) Usando o “melhor” valor de  $T$  encontrado anteriormente discretize a planta e faça todo o projeto de modo discreto. Os autovalores desejados para o sistema devem vir da aplicação da relação fundamental aos autovalores contínuos. Já para o observador, use uma dinâmica dead-beat.
  - (f) Compare as soluções discretas obtidas. Qual é a melhor? Qual é mais fácil de obter?
16. Agora a planta é  $P(s) = (s - 2)/(s^2 - s)$  e desejamos satisfazer as mesmas especificações de desempenho do problema (10). É possível resolver este problema por meio de realimentação de saída?
17. Repita o problema (15) — sim, todos os itens — para esta nova planta  $P(s)$ .

(d) Na sua opinião, qual o melhor método?

10. Desejamos controlar a planta  $P(s) = 1/(s^2 + 2s)$  de modo a satisfazer as seguintes especificações:

# 1: Erro de regime nulo para entradas em degrau.

# 2: P.O. < 5%

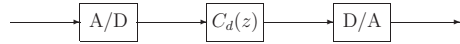
# 3:  $T_s < 9$

# 4:  $T_r$  o menor possível

Foi visto em sala que um esquema em malha fechada com realimentação unitária de saída e compensador  $C(s) = 2$  funciona como solução.

- (a) Determinar os pólos da malha fechada e calcular uma expressão analítica para  $y_a(t)$ , a resposta ao degrau da malha fechada.  
(b) Simular o sistema e plotar  $y_a(t)$

11. A discretização do compensador analógico acima é dada por  $C_d(z) = 2$ . Uma implementação digital



é inserida no sistema e a resposta ao degrau é chamada de  $y_d(t)$ . O sinal de erro  $\epsilon(t) = y_a(t) - y_d(t)$  mede a qualidade da aproximação digital.

- (a) Por meio de simulação plotar  $y_d(t)$  e  $\epsilon(t)$  para  $T = 1$ . O erro tende a zero? é limitado? cresce?  
(b) Repita o item (a) para  $T = 2, T = 3, T = 4$  e outros valores superiores. É possível aumentar indefinidamente o período de amostragem?  
(c) Repita o item (a) para  $T = 0.8, T = 0.6, T = 0.4$  e outros valores menores. O erro melhora? Qual é o maior valor de  $T$  que acarreta erro aceitável (a seu critério).
12. Discretize a planta  $P(s)$  para o valor mais elevado de  $T$  usado no exercício 11, item (c). Por meio do Lugar das Raízes faça um projeto discreto e obtenha  $C_d(z)$ . Simule e plote a resposta bem como o sinal de erro.
13. Refaça o exercício anterior para todos (sim, todos) os valores de  $T$  usados no exercício 11. Qual é o melhor projeto discreto? Qual é o melhor projeto?

**Exemplo 1.2.1** Para o impulso unitário discreto,  $\delta(k)$ , temos, trivialmente:

$$\mathcal{Z}\{\delta(k)\} = 1 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + \dots = 1$$

Para o impulso aplicado no instante  $m$ , que também pode ser considerado como um impulso deslocado de  $m$  instantes, teríamos

$$\mathcal{Z}\{\delta(k - m)\} = 0 + 0z^{-1} + \dots + z^{-m} + 0 + \dots = z^{-m}$$

**Exemplo 1.2.2** Para o degrau unitário discreto,  $1(k)$ , aplicando a definição:

$$\mathcal{Z}\{1(k)\} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots = 1 + \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \dots$$

Lembre-mos ( $\mathcal{P}$  científico, mais ou menos) de algo chamado “soma dos termos de uma PG ilimitada”. Algum tempo depois, já universitários, era a tal “série geométrica”. De uma maneira ou de outra agora veremos realmente para que serve isso:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi^k = 1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \dots = \frac{1}{1 - \xi}$$

desde que algumas sutilezas —  $|\xi| < 1$  — sejam satisfeitas. Assim,

$$\mathcal{Z}\{1(k)\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad \text{para } |z| > 1$$

Supimpa! Para todos os efeitos operacionais a nossa transformada em  $z$  sempre convergirá.

**Exemplo 1.2.3** Para o degrau unitário atrasado de  $m$  instantes,  $1(k - m)$  onde  $m > 0$ , temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{1(k)\} &= 0 + \dots + z^{-m} + z^{-(m+1)} + \dots = z^{-m} (1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots) \\ &= z^{-m} \frac{z}{z - 1} \end{aligned}$$

**Exemplo 1.2.4** Para a exponencial discreta,  $f(k) = a^k$ , temos, novamente pela definição:

$$\mathcal{Z}\{a^k\} = F(z) = 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \frac{a^3}{z^3} + \dots = \frac{1}{1 - (a/z)} = \frac{z}{z - a}$$

É bom notar que esta seqüência  $f(k)$  último exemplo é bilateral, ou seja, é um sinal definido  $\forall k \in \mathbb{Z}$ . Seja agora a seqüência  $f^+(k) = a^k 1(k)$ . Para  $k \geq 0$  este sinal é idêntico ao anterior, logo

$$\mathcal{Z}\{f^+(k)\} = F^+(z) = \dots = \frac{1}{1 - (a/z)} = \frac{z}{z - a} = F(z)$$

Este exemplo mostra que a definição apresentada de Transformada Z pode ser aplicada a uma sequência  $x_k$  genérica, bilateral. Para “unilateralizar” esta sequência, ou seja, encontrar uma outra sequência que coincide com ela para  $k \geq 0$  e se anula para  $k < 0$  faríamos:  $x^+(k) = a^k 1(k)$ . Como a transformada Z emprega apenas valores de  $k \geq 0$  teremos

$$X(z) = X^+(z)$$

e podemos nos perguntar por que não restringir a aplicabilidade da transformada Z às sequências unilaterais. Uma possível resposta é dada a seguir, quando o fato de as sequências serem ou não unilaterais faz diferença.

**Exemplo 1.2.5** *Atrasaremos, ou seja, deslocaremos para a direita, os sinais  $f$  e  $f^+$  do exemplo 1.2.4 em um instante discreto:  $g(k) = Q_1 f(k) = f(k-1)$  e  $g^+(k) = Q_1 f^+(k) = f^+(k-1)$ .*

$$\mathcal{Z}\{g(k)\} = f(-1) + f(0)z^{-1} + f(1)z^{-2} + \dots = f(-1) + z^{-1}F(z)$$

$$\mathcal{Z}\{g^+(k)\} = 0 + f(0)z^{-1} + f(1)z^{-2} + \dots = 0 + z^{-1}F(z)$$

Há tabelas listando várias sequências e suas transformadas. Para nós, o uso da definição e de algumas propriedades permitirá o cálculo para as sequências mais importantes.

### 1.3 Propriedades da transformada z

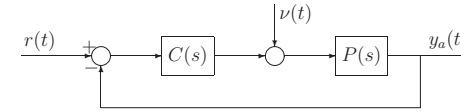
É possível encontrar as transformadas de outras sequências importantes simplesmente empregando a definição, como foi feito nos exemplos anteriores. Neste processo poderíamos perceber que algumas peculiaridades se repetem com frequência. As mentalidades mais matemáticas tomariam estas coincidências como indícios de estruturas possivelmente gerais e partiriam em busca de demonstrações rigorosas. Nos casos em que tais demonstrações são alcançadas temos as Propriedades, algumas das quais são listadas abaixo.

#### Propriedade 1.3.1 : — Linearidade —

*Sejam  $x_1$  e  $x_2$  sequências quaisquer e  $a_1$  e  $a_2$  reais quaisquer temos*

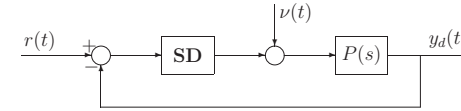
$$\mathcal{Z}\{a_1 x_1(k) + a_2 x_2(k)\} = a_1 \mathcal{Z}\{x_1(k)\} + a_2 \mathcal{Z}\{x_2(k)\} = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$$

7. Para cada um dos valores usados anteriormente para  $T$  compare os cinco métodos de discretização por meio do parâmetro  $\bar{\epsilon}$ .
8. A saída de uma dada planta  $P(s)$  deve seguir sinais de referência em degrau com erros de regime nulos e um transitório adequado (rápido e com pouco overshoot). Isto deve acontecer mesmo em presença de distúrbios  $\nu(t)$  constantes. O diagrama abaixo esquematiza uma solução em malha fechada para problemas desse tipo



Quando a planta é um integrador ( $P(s) = 1/s$ ) um compensador PI com função de transferência  $C(s) = K(s+1)/s$  pode ser considerado solução do problema.

- (a) Encontrar um valor de  $K$  que acarrete transitório rápido e sem overshoot. Plotar várias curvas para justificar a escolha.
  - (b) Verificar, por simulações, a influência de degraus de distúrbios.
9. Para o mesmo problema acima desejamos implementar digitalmente  $C(s)$  por meio de um compensador **SD** composto por conversores **A/D** e **D/A** envolvendo uma discretização  $C_d(z)$ :



Para julgar a qualidade de uma implementação digital devemos calcular ou plotar a função erro  $\epsilon(t) = y_a(t) - y_d(t)$ , onde as saídas  $y_a(t)$  e  $y_d(t)$  são calculadas para as mesmas entradas  $r(t)$  e  $\nu(t)$ , ou então calcular o índice  $\bar{\epsilon} = \int_0^\infty \epsilon^2(t) dt$ .

- (a) Pelo método #1, do mapeamento de pólos e zeros, estude o efeito de  $T$  na qualidade da implementação e escolha o maior valor que apresenta desempenho aceitável.
- (b) Repita o item anterior para os outros quatro métodos.
- (c) Qual o melhor método para valores altos de  $T$ ? para valores médios? para valores baixos?



- (a) Para cada valor de  $T$  compare visualmente as seqüências  $a(k)$  e  $d(k)$ .
  - (b) Para cada valor de  $T$  plote a seqüência  $\epsilon(k) = (a(k) - d(k))^2$  e calcule a sua soma  $\bar{\epsilon} = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon(k)$  supondo entradas em degrau.
  - (c) Para cada valor de  $T$  encontre o melhor  $K_d$ .
3. Pelo método #2, Euler atrasado, discretize os mesmos compensadores, para os mesmos valores de  $T$ .
  - (a) Encontre analiticamente os valores “seguros” de  $T$ .
  - (b) Para cada valor de  $T$  compare visualmente as seqüências  $a(k)$  e  $d(k)$ .
  - (c) Para cada valor de  $T$  plote a seqüência  $\epsilon(k) = (a(k) - d(k))^2$  e calcule a sua soma  $\bar{\epsilon} = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon(k)$  supondo entradas em degrau.
4. Pelo método #3, Euler avançado, discretize os mesmos compensadores, para os mesmos valores de  $T$ .
  - (a) Aceite o convite da página 73.
  - (b) Para cada valor de  $T$  compare visualmente as seqüências  $a(k)$  e  $d(k)$ .
  - (c) Para cada valor de  $T$  plote a seqüência  $\epsilon(k) = (a(k) - d(k))^2$  e calcule a sua soma  $\bar{\epsilon} = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon(k)$  supondo entradas em degrau.
5. Pelo método #4, Newton-Raphson, discretize os mesmos compensadores, para os mesmos valores de  $T$ .
  - (a) Aceite o convite da página 76.
  - (b) Para cada valor de  $T$  compare visualmente as seqüências  $a(k)$  e  $d(k)$ .
  - (c) Para cada valor de  $T$  plote a seqüência  $\epsilon(k) = (a(k) - d(k))^2$  e calcule a sua soma  $\bar{\epsilon} = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon(k)$  supondo entradas em degrau.
6. Pelo método #5, Equivalência ao Degrau, discretize os mesmos compensadores, para os mesmos valores de  $T$ .
  - (a) Para cada valor de  $T$  compare visualmente as seqüências  $a(k)$  e  $d(k)$ .
  - (b) Para cada valor de  $T$  plote a seqüência  $\epsilon(k) = (a(k) - d(k))^2$  e calcule a sua soma  $\bar{\epsilon} = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon(k)$  supondo entradas em degrau.

Esta propriedade ensina como calcular a transformada de uma combinação linear de duas seqüências. A demonstração de sua validade é uma consequência direta e trivial da definição e será omitida. O fato de a transformada em  $Z$  ser linear é certamente responsável pela sua enorme importância e vasta aplicabilidade. Outras transformadas populares, como Laplace e Fourier, também devem boa parte de seus méritos à linearidade.

**Propriedade 1.3.2 : — Atraso Unitário —**

Seja  $x$  uma seqüência qualquer e  $y(k) = Q_1 x_k = x(k-1)$  a seqüência atrasada de uma unidade:

$$\mathcal{Z}\{Q_1 x_k\} = \mathcal{Z}\{x(k-1)\} = z^{-1}X(z) + x(-1)$$

**Demonstração:** Aplicando a definição temos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{y(k)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)z^{-k} \\ &= x(-1) + x(0)z^{-1} + x(1)z^{-2} + \dots \\ &= x(-1) + z^{-1}(x(0) + x(1)z^{-1} + \dots) \\ &= x(-1) + z^{-1}X(z) \end{aligned}$$

Quando  $x_k$  é unilateral, ou então quando ela é unilateralizada — resulta da multiplicação de uma seqüência bilateral por  $1(k)$  — a propriedade acima se particulariza, pois  $x(-1) = 0$ . Esta situação é suficientemente importante para merecer destaque:

**Propriedade 1.3.3 : — Atraso Unitário, caso unilateral —**

Seja  $x$  uma seqüência unilateral qualquer e  $y(k) = Q_1 x_k = x(k-1)$  a seqüência atrasada de uma unidade:

$$\mathcal{Z}\{Q_1 x_k\} = \mathcal{Z}\{x(k-1)\} = z^{-1}X(z)$$

**Propriedade 1.3.4 : — Avanço Unitário —**

Seja  $x$  uma seqüência qualquer e  $y(k) = Q_{-1} x_k = x(k+1)$  a seqüência avançada de uma unidade:

$$\mathcal{Z}\{Q_{-1} x_k\} = \mathcal{Z}\{x(k+1)\} = zX(z) - zx(0)$$

**Demonstração:** Aplicando a definição temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{y(k)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)z^{-k} \\
&= x(1) + x(2)z^{-1} + x(3)z^{-2} + \dots \\
&= z \left( x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \dots \right) \\
&= z(X(z) - x(0)) \\
&= zX(z) - zx(0)
\end{aligned}$$

Atrasar ou avançar seqüências, no domínio do tempo, equivale a dividir ou multiplicar por  $z$ , sempre lembrando de adicionar os termos iniciais  $x(-1)$  ou  $x(0)$ . Comparando com a transformada de Laplace no caso contínuo percebemos que estas operações são os correspondentes discretos das operações contínuas de integração e derivação.

Para seqüências atrasadas ou avançadas de mais de um instante podemos aplicar as propriedades acima repetidas vezes, ou então generalizar.

#### Propriedade 1.3.5 : — Atraso no Tempo —

Seja  $x$  uma seqüência qualquer e  $y(k) = Q_m x_k = x(k-m)$  com  $m > 0$  a transformada da seqüência atrasada de  $m$  unidades é dada por

$$\mathcal{Z}\{Q_m x_k\} = \mathcal{Z}\{x(k-m)\} = z^{-m}X(z) + \sum_{j=1}^m z^{j-m}x(-j)$$

**Demonstração:** Aplicando a definição temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{y(k)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k-m)z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} x(k-m)z^{-k} + \sum_{k=m}^{\infty} x(k-m)z^{-k}
\end{aligned}$$

Mudando a variável da primeira soma para  $j = m - k$  e a da segunda para  $i = k - m$  temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{y(k)\} &= \sum_{j=m}^1 x(-j)z^{j-m} + \sum_{i=0}^{\infty} x(i)z^{-i-m} \\
&= \sum_{j=1}^m x(-j)z^{j-m} + z^{-m} \sum_{i=0}^{\infty} x(i)z^{-i}
\end{aligned}$$

que pode (e deve!) ser simplificada até

$$P_d(z) = 1 + (z-1) \frac{z - e^{\sigma T} \left( \frac{\sigma}{\omega} \text{sen } \omega T + \cos \omega T \right)}{[z - e^{\sigma T} (\cos \omega T + \text{sen } \omega T)][z - e^{\sigma T} (\cos \omega T - \text{sen } \omega T)]}$$

Para haver cancelamentos devemos ter

$$e^{\sigma T} \left( \frac{\sigma}{\omega} \text{sen } \omega T + \cos \omega T \right) = e^{\sigma T} (\cos \omega T \pm \text{sen } \omega T)$$

$$\iff \frac{\sigma}{\omega} \text{sen } \omega T + \cos \omega T = \cos \omega T \pm \text{sen } \omega T$$

$$\iff \frac{\sigma}{\omega} \text{sen } \omega T = \pm \text{sen } \omega T$$

$$\iff (\sigma \mp j\omega) \text{sen } \omega T = 0$$

$$\iff \text{sen } \omega T = 0 \iff \omega T = m\pi \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

Donde se conclui que a condição para que o método da equivalência ao degrau produza perda de dinâmica (cancelamentos) é que

$$T = m \frac{\pi}{\omega} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

Isto explica o exemplo anterior, onde  $\omega = 2\pi$  e havíamos encontrado de maneira empírica alguns destes valores críticos:

$$T = 0.5 = 1 \frac{\pi}{2\pi} \quad \text{ou} \quad T = 1 = 2 \frac{\pi}{2\pi} \quad \text{ou} \quad \dots$$

## 3.4 Exercícios

1. Um integrador ideal recebe  $u(t) = Ae^{-\alpha t}$  como entrada. Encontre a saída e plote seu gráfico. Amostras de  $u(t)$  definidas por  $u(kT) = A(e^{-\alpha T})^k$  são aplicadas a um integrador retangular e a um trapezoidal. Determine e plote as seqüências de saída para cada caso e compare com a saída amostrada do integrador ideal. Comente.
2. Pelo método #1, do mapeamento de pólos e zeros, discretize os compensadores

$$C_1(s) = 2 \frac{s^2 + 3s + 2}{s(s^2 + 2s + 2)} \quad \text{e} \quad C_2(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

para  $T = 8.00, 4.00, 2.00, 1.00, 0.50, 0.10, 0.05, 0.01$ :

Mesmo sendo “perfeito” este método ainda pode apresentar aspectos desagradáveis como a perda de dinâmica. A explicação é simples: qualquer período  $T$  é capaz de amostrar uma entrada  $u(t)$  constante, mas pode não ser suficientemente rápido para captar toda a dinâmica presente na resposta  $y(t)$ . Se isto acontece teremos resultados errados, problemáticos, embora a discretização seja perfeita.

Para fixar as idéias, seja a planta cuja função de transferência é composta apenas por um par de pólos complexos conjugados  $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$  onde  $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ , e, para garantir a estabilidade,  $\sigma < 0$

$$P(s) = \frac{K}{s - \sigma \mp j\omega} = \frac{K}{s^2 - 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2}$$

Trata-se de um sistema de 2.a ordem com frequência natural dada por  $\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$  e fator de amortecimento  $\zeta = |\sigma|/\omega_n < 1$ . A resposta ao degrau de plantas como esta é caracterizada por oscilações com amplitudes decrescentes que se estabilizam em torno do valor de regime  $K/\omega_n^2$ . Supondo  $K = \omega_n^2$  a expressão analítica para essa resposta ao degrau é

$$y(t) = a + b_1 e^{\lambda_1 t} + b_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} a &= 1 \\ b_{1,2} &= -0.5(1 \pm j\sigma/\omega) \\ \lambda_{1,2} &= \sigma \pm j\omega \end{cases}$$

Esta expressão pode ser desenvolvida até uma forma puramente real, mais conhecida:

$$y(t) = 1 + e^{\sigma t} \left( \frac{\sigma \sin \omega t}{\omega} - \cos \omega t \right)$$

que, quando plotada, fornece as tradicionais curvas sub amortecidas. Amostrando esta equação temos

$$a(k) = y(kT) = 1 + b_1 e^{\lambda_1 T} k + b_2 e^{\lambda_2 T} k$$

cujas transformada  $Z$  é

$$A(z) = \frac{a}{z-1} + b_1 \frac{z}{z - e^{\lambda_1 T}} + b_2 \frac{z}{z - e^{\lambda_2 T}}$$

e conduz à planta discretizada

$$P_d(z) = \frac{z-1}{z} A(z) = 1 + (z-1) \left( \frac{b_1}{z - e^{\lambda_1 T}} + \frac{b_2}{z - e^{\lambda_2 T}} \right)$$

### Propriedade 1.3.6 : — Avanço no Tempo —

Seja  $x$  uma seqüência qualquer e  $y(k) = Q_{-m} x_k = x(k+m)$  com  $m > 0$ , a transformada da seqüência avançada de  $m$  unidades é dada por

$$\mathcal{Z}\{Q_{-m} x_k\} = \mathcal{Z}\{x(k+m)\} = z^m X(z) - \sum_{j=0}^{m-1} z^{m-j} x(j)$$

**Demonstração:** Aplicando a definição temos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{y(k)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+m) z^{-k} \\ &= z^m \sum_{k=0}^{\infty} x(k+m) z^{-k} z^{-m} = z^m \sum_{k=0}^{\infty} x(k+m) z^{-(k+m)} \end{aligned}$$

Mudando a variável da soma para  $j = k+m$  temos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{y(k)\} &= z^m \sum_{j=m}^{\infty} x(j) z^{-j} \\ &= z^m \left( X(z) - \sum_{j=0}^{m-1} x(j) z^{-j} \right) \\ &= z^m X(z) - \sum_{j=0}^{m-1} x(j) z^{m-j} \end{aligned}$$

É sempre bom frizar que atrasar uma seqüência é deslocá-la para a direita, ao passo que avançar significa um deslocamento para a esquerda. Como exemplo, sejam as seqüências deslocadas de duas unidades:

$$\mathcal{Z}\{x(k-2)\} = z^{-2} X(z) + z^{-1} x(-1) + x(-2)$$

$$\mathcal{Z}\{x(k+2)\} = z^2 X(z) - z^2 x(0) - z x(1)$$

### Propriedade 1.3.7 : — Teorema do Valor Inicial —

Permite calcular o valor inicial de uma seqüência cuja transformada é conhecida.

$$x(0) = \lim_{k \rightarrow 0} x_k = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

**Demonstração:** Basta usar a definição

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

e fazer  $z \rightarrow \infty$ .

**Propriedade 1.3.8 : — Teorema do Valor Final —**

Permite calcular o valor final ou terminal de uma seqüência unilateral cuja transformada é conhecida.

$$x(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$$

**Demonstração:** Imaginemos um sinal  $y$  definido por  $y(k) = x(k) - x(k-1)$ . A soma dos seus  $N+1$  primeiros termos seria

$$\sum_{k=0}^N y(k) = x(0) + x(-1) + x(1) - x(0) + \cdots + x(N) - x(N-1) = x(N)$$

pois a seqüência é unilateral e  $x(-1) = 0$ . Fazendo  $N \rightarrow \infty$  percebemos que o valor final de  $x_k$  é dado pela soma de todos os termos de  $y(k)$ , e esta quantidade é obtida trivialmente de sua transformada:

$$x(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} Y(z)$$

Mas, pela definição de  $y$  temos  $Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z)$ , e fim de papo.

**Propriedade 1.3.9 : — Multiplicação por exponencial —**

Sendo  $a$  um real qualquer:

$$\mathcal{Z}\{a^k x(k)\} = X(z/a)$$

**Demonstração:** Esta fica para vocês!

Ainda há muitas outras propriedades, mas estas são as mais básicas. Com um certo domínio sobre as propriedades e com consultas a tabelas as transformadas de praticamente todas as seqüências de algum interesse podem ser encontradas.

## 1.4 Transformada Inversa

O problema da transformada inversa, também chamada de antitransformada, é simples: dada  $X(z)$  encontrar  $x(k)$ . Algumas vezes este problema pode ser resolvido com uma consulta à tabela das transformadas  $Z$ ; quando isto não for possível, por ser a  $F(z)$  em estudo muito complicada, há duas maneiras básicas de atacar o problema.

**Definição 3.3.1** O excesso de pólos, simbolizado por  $ep$ , de uma função racional  $G(\xi) = n(\xi)/d(\xi)$  é definido como a diferença entre os graus do denominador  $d(\xi)$  e do numerados  $n(\xi)$ ;

$$ep = \delta\{d(\xi)\} - \delta\{n(\xi)\} = \# \text{ de pólos de } G(\xi) - \# \text{ de zeros de } G(\xi)$$

Em alguns textos o excesso de pólos é chamado de **ordem** da função racional. Este conceito permite uma maneira alternativa de apresentar conceitos importantes. Pode-se dizer, por exemplo, que uma função racional  $G(\xi)$  é

1. **imprópria** quando  $ep\{G\} < 0$ ;
2. **própria** quando  $ep\{G\} \geq 0$ ;
3. **estritamente própria** quando  $ep\{G\} > 0$ ;
4. **biprópria** quando  $ep\{G\} = 0$ ;

O próximo resultado vem sem demonstração, os leitores interessados podem procurá-la em ...

**Teorema 3.3.3** Uma planta contínua  $P(s)$  com  $ep > 0$  (estritamente própria) é transformada pelo método de equivalência ao degrau em uma planta discreta  $P_d(z)$  com  $ep = 1$ . Uma  $P(s)$  biprópria (com  $ep = 0$ ) é transformada em uma  $P_d(z)$  também biprópria (com  $ep = 0$ ).

Aparentemente o método considera que a ordem natural das plantas discretas é ter sempre um pólo a mais ( $ep = 1$ ), e então ele tende a “criar” tantos zeros quantos necessários para atingir isso. A exceção é para plantas bipróprias, que já possuem muitos zeros: o seu número não é alterado, mas suas posições podem ser.

E mais não se pode dizer sobre os zeros ... como são transformados os zeros já existentes? é possível encontrar uma transformação, um mapa, para explicar este funcionamento?

Estes são os fatos gerais e rigorosos que se pode apresentar sobre o método de equivalência ao degrau: pólos tratados pela relação fundamental, zeros tratados de maneira obscura, da qual se sabe apenas poucos aspectos quantitativos. Para analisar o problema da perda de dinâmica, precisaremos de outras considerações. A elas.

O método de equivalência ao degrau foi concebido para funcionar de modo perfeito quando a planta é submetida a entradas constantes. Isto significa que, fixado um período  $T$  qualquer, a resposta  $y_d(k)$  ao degrau discreto da planta discretizada  $P_d(z)$  é idêntica à seqüência obtida pela amostragem da resposta  $y(t)$  ao degrau de  $P(s)$ .

$$\forall i = 1, 2, \dots, n \quad \lambda_i \text{ é autovalor de } A \iff e^{\lambda_i T} \text{ é autovalor de } e^{AT}$$

A demonstração deste fato é simples (quando  $A$  está em forma diagonal, ela é direta) e fica, portanto, para os leitores. Uma importante consequência é dada pelo

**Teorema 3.3.1** *O método da Equivalência ao Degrau trabalha com a relação fundamental  $z = e^{sT}$  para transformar pólos contínuos em pólos discretos. Em outras palavras, se  $p \in \mathbb{C}$  é pólo de  $P(s)$  então  $\pi = e^{pT} \in \mathbb{C}$  é pólo de  $P_d(z)$ .*

A demonstração deste resultado é imediata, a partir das considerações acima. E ele explica muita coisa. Pólos contínuos em  $\mathbb{C}^-$  (estáveis), por exemplo, serão sempre mapeados em pólos discretos no disco unitário (também estáveis); pólos na origem (integradores) são sempre mapeados em  $+1$ ; períodos de amostragem muito pequenos tendem a levar os pólos para  $\dots$  para onde mesmo, leitores? e os muito grandes?

Busquemos uma luz para o problema de perda de dinâmica. Nos casos ilustrados, pólos (analógicos) complexos conjugados eram mapeados em pólos (discretos) reais e coincidentes e um destes era cancelado. Para estudar as condições sob as quais complexos conjugados são mapeados em reais, considere  $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$  onde  $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ . A aplicação da relação fundamental conduz a

$$s_{1,2} = \sigma \pm j\omega \longrightarrow z = e^{sT} \longrightarrow z_{1,2} = e^{\sigma T} (\cos \omega T \pm j \sin \omega T)$$

É fácil perceber que a condição é

$$\sin \omega T = 0 \iff \omega T = m\pi \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

e podemos enunciar o

**Teorema 3.3.2** *Um par de pólos complexos conjugados  $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$  é mapeado no mesmo valor quando e apenas quando  $T = m(\pi/\omega) \quad \forall m \in \mathbb{Z}$*

O problema da perda de dinâmica é um pouco mais intrincado, pois um dos zeros também deve ser mapeado nesse mesmo valor real. Vejamos então o que se pode dizer dos zeros, como eles são tratados pelo método da equivalência ao degraú. Para isso precisamos do conceito, muito simples, relacionado às funções racionais

### 1.4.1 Método aberto

Usando as ferramentas matemáticas necessárias devemos expandir  $X(z)$  em um série de potências de  $z^{-1}$ :

$$X(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots$$

Feito isto identificaríamos os coeficientes  $a_i$  com os elementos da sequência:

$$a_0 = x(0); \quad a_1 = x(1); \quad \dots \quad a_k = x(k) \quad \dots$$

Quando  $X(z)$  é uma função racional, como é normalmente o caso, a expansão pode ser feita simplesmente dividindo o polinômio numerador pelo denominador.

**Exemplo 1.4.1** *Seja a transformada  $Z$*

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0,5)} = \frac{z^2}{z^2 - 1,5z + 0,5}$$

*A divisão poderia ser feita neste ponto, mas muitas vezes ainda se efetua uma normalização preliminar, dividindo numerador e denominador de modo a eliminar potências positivas de  $z$ .*

$$X(z) = \frac{z^{-2} z^2}{z^{-2}(z^2 - 1,5z + 0,5)} = \frac{1}{1 - 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}}$$

*Agora se faria a divisão:*

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1 - 1,50z^{-1} + 0,50z^{-2} \\ \hline 1 - 1,50z^{-1} + 0,50z^{-2} & 1 + 1,50z^{-1} + 1,75z^{-2} + \dots \\ \hline & 1,50z^{-1} - 0,50z^{-2} \\ & \underline{1,50z^{-1} - 2,25z^{-2} + 0,75z^{-3}} \\ & 1,75z^{-2} - 0,75z^{-3} \\ & \dots \end{array}$$

*Isto leva a  $X(z) = 1 + 1,50z^{-1} + 1,75z^{-2} + \dots$  donde se obteria trivialmente  $x_k$ :  $x(0) = 1$   $x(1) = 1,50$   $x(2) = 1,75$   $\dots$  etc. Algumas verificações de validade:*

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}} = 1$$

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{z^2}{(z-1)(z-0,5)} = \frac{1}{0,5} = 2$$

Este método funciona sempre mas, como o próprio nome diz, seu resultado é uma sequência em forma aberta e em alguns casos isto pode não ser conveniente. Com efeito, o trabalho para se calcular o valor de  $y$  em um instante  $k$  é tanto maior quanto maior é  $k$ , não há atalhos simplificadores ou fórmulas diretas. Esta seria a seara do próximo método.

### 1.4.2 Método fechado

A idéia é “preparar” a expressão  $X(z)$ , usualmente com uma expansão em frações parciais, para decompô-la em partes mais simples cujas transformadas inversas sejam bem conhecidas. O procedimento parece ser idêntico ao já conhecido para o caso contínuo. Dada uma função racional representando  $X(z)$  o seu denominador seria fatorado, como abaixo.

$$X(z) = \frac{n(z)}{d(z)} = \frac{n(z)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)} = \frac{a_1}{z-p_1} + \frac{a_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{a_n}{z-p_n}$$

As funções elementares seriam (supondo pólos reais e distintos, como acima) do tipo  $a_i/(z-p_i)$  e teríamos uma surpresa desagradável ao perceber que elas correspondem a seqüências razoavelmente complicadas e que podem estar ausentes das tabelas mais simples. O truque para evitar impecilhos deste tipo é expandir  $X(z)/z$  ou seja, dividir por  $z$  antes de mais nada. Com este artifício teríamos

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{a_1}{z-p_1} + \frac{a_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{a_n}{z-p_n}$$

donde vem

$$X(z) = a_1 \frac{z}{z-p_1} + a_2 \frac{z}{z-p_2} + \cdots + a_n \frac{z}{z-p_n}$$

Estas são figurinhas fáceis em qualquer tabela que se preze, e, mais ainda, devem já ter sido memorizadas por todos.

#### Exemplo 1.4.2

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0,50)}$$

Dividindo por  $z$  e depois expandindo:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-0,50)} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{z-0,50}$$

complexo, e no caso discreto eles estão fora do disco unitário, como alguns dos acima.

Sistemas (analógicos ou discretos) com zeros de fase não mínima tem seu desempenho degradado, suas respostas a degraus são mais lentas e apresentam oscilações indesejáveis perto da origem. Além desse aspecto, tais sistemas são muito difíceis de controlar, como se verá oportunamente, e isto é grave.

### 3.3.2 Que Acontece a Pólos e Zeros?

No projeto analógico de controladores digitais a discretização dos compensadores pode ser feita por qualquer um dos métodos apresentados, mas qual deles é superior? Em estudos comparativos quase sempre o método de equivalência ao degrau se destaca, algumas vezes acompanhado por outros. Já no projeto discreto, usa-se quase que exclusivamente este método para a discretização das plantas, por motivos já vistos. Nada mais justo então do que um estudo mais profundo sobre ele, o que será feito nesta seção.

Seja uma planta descrita por sua função de transferência e também por uma equação de estados:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad P(s) = C(sI - A)^{-1}B = K \frac{n(s)}{d(s)}$$

Sabemos que a inexistência de cancelamentos entre  $n(s)$  e  $d(s)$  é equivalente à controlabilidade e observabilidade da equação dinâmica. Nestas condições, que suporemos presentes a partir de agora, os pólos de  $P(s)$  são os autovalor da matriz  $A$ :

$$\forall i = 1, 2, \dots, n \quad p_i \text{ é pólo de } P(s) \iff p_i = \lambda_i \text{ é autovalor de } A$$

Após a discretização teremos

$$\begin{cases} x_d(k+1) = A_d x_d(k) + B_d u_d(k) \\ y_d(k) = C_d x_d(k) \end{cases} \quad P_d(z) = C_d(zI - A_d)^{-1}B_d = K_d \frac{n_d(z)}{d_d(z)}$$

Nada garante a que estas equações discretas sejam controláveis e observáveis, na realidade o perigo de haver falhas nestas propriedades é real, como já vimos nos exemplos, e as conseqüências destas falhas são certamente problemáticas. Mas mesmo se houver perda de dinâmica, pode-se afirmar que os pólos de  $P(z)$  são autovalor de  $A_d$ :

$$\text{Se } \pi_i \text{ é pólo de } P_d(z) \text{ então } \pi_i \text{ é autovalor de } A_d$$

Mas  $A_d = e^{AT}$  e existe um conhecido resultado da álgebra matricial que relaciona os autovalores de uma dada matriz quadrada e de sua exponencial:

$$e^{\lambda_1 T} - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad e^{\lambda_2 T} - e^{\lambda_1 T} = 0$$

A primeira condição é impraticável, pois requer períodos de amostragem nulos; pode-se mostrar que a segunda é equivalente a

$$\sin 2\pi T = 0 \iff 2\pi T = m\pi \quad \forall m \in \mathbb{Z} \iff T = \frac{m}{2} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

Pronto. Para alguns valores de  $T$  (0, 0.5, 1.0, 1.5, ...) o método causa incontrolabilidade ou, em outras palavras, cancelamento entre pólos e zeros. É o mesmo fenômeno visto antes, em um contexto frequencial.

Sugere-se que os leitores repitam este exemplo usando outras realizações, como por exemplo uma de Jordan com matrizes  $C$  e  $B$  diferentes, ou então a realização canônica controlável.

**Exemplo 3.3.3** Discretizar a planta abaixo, pelo método da equivalência ao degrau

$$P(s) = \frac{100\sqrt{2}}{s^3 + 2s^2 + 2s} = \frac{100\sqrt{2}}{s(s+1+j)(s+1-j)}$$

Considerando que a banda de passagem é aquela associada ao par de pólos, ou seja, é dada por  $\omega_n = \sqrt{2}$  podemos calcular  $10\omega_n \approx 14$  donde, para evitar perda de dinâmica, devemos ter  $T \leq \pi/7 \approx 0.45$ . Usando então  $T = 0.4$  teremos

$$P_d(z) = 1.2308 \frac{(z + 3.0400)(z + 0.2203)}{(z - 1.0000)(z - 0.6174 \pm j0.2610)}$$

Diminuindo o período para  $T = 0.1$  chegamos a

$$P_d(z) = 0.0224 \frac{(z + 3.5490)(z + 0.2550)}{(z - 1.0000)(z - 0.9003 \pm j0.0903)}$$

Em ambos os casos os pólos complexos analógicos foram transformados em pólos complexos, sem qualquer tipo de cancelamentos, e o pólo com efeito integrador se colocou em +1, como já havia acontecido em outros métodos. O fato a se notar é relativo aos zeros: em cada caso apareceram dois.

Em muitas situação esta “criação” de zeros é até saudada, pois zeros podem aumentar a rapidez, como já comentamos. Mas há casos de zeros indesejáveis. Normalmente zeros localizados nas regiões associadas à instabilidade são chamados de zeros de **fase ou defasagem não mínima**. No caso contínuo estes zeros estão em  $\mathbb{C}^+$ , o semiplano direito aberto do plano

Os resíduos podem ser obtidos por qualquer dos métodos tradicionais, como por exemplo

$$a_1 = \left[ (z-1) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=1} = 2 \quad a_2 = \left[ (z-0,50) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=0,50} = -1$$

o que acarreta

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z-0,50} \implies X(z) = 2 \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0,50}$$

donde se conclui, facilmente, que  $x_k = 2 \cdot 1(k) - (0,5)^k$ . Pronto, eis uma forma fechada para a seqüência  $x(0) = 1$   $x(1) = 1,50$   $x(2) = 1,75$  ... etc, que tanto trabalho causava no exemplo 1.4.1.

Os leitores são convidados a resolver este exemplo expandindo  $X(z)$ , sem divisões por  $z$ . Quando a expressão para  $X(z)$  possui numerador independente de  $z$  o procedimento é o mesmo, mas a ordem do denominador aumenta.

**Exemplo 1.4.3**

$$F(z) = \frac{1}{(z-1)(z-0,50)}$$

Dividindo por  $z$  e depois expandindo:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z(z-1)(z-0,50)} = \frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{z-0,50}$$

$$a_0 = \left[ z \frac{F(z)}{z} \right]_{z=0} = 2 \quad a_1 = \left[ (z-1) \frac{F(z)}{z} \right]_{z=1} = 2 \quad a_2 = \dots = -4$$

o que acarreta

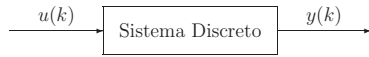
$$\frac{F(z)}{z} = \frac{2}{z} + \frac{2}{z-1} - 4 \frac{1}{z-0,50} \quad e \quad F(z) = 2 + 2 \frac{z}{z-1} - 4 \frac{z}{z-0,50}$$

donde se conclui  $f(k) = 2\delta(k) + 2 \cdot 1(k) - 4 \cdot (0,5)^k$ . Esta seqüência corresponde à forma aberta  $f(0) = 0$   $f(1) = 0$   $f(2) = 1$  ... etc. Comparando esta seqüência com a do exemplo anterior é interessante reparar que  $F(z) = z^{-2}X(z)$ , significando que  $f$  resulta de se atrasar  $x$  duas unidades de tempo:  $f(k) = x(k-2)$ .

## 1.5 Operadores e Sistemas Discretos

A idéia básica é a mesma, apenas agora os sinais envolvidos são discretos. Alguns sistemas importantes tem comportamentos que podem ser descritos de maneira simples e natural por modelos discretos, como por exemplo uma caderneta de poupança; em outros casos temos uma realidade contínua que pode ser descrita por modelos discretos após um processo de amostragem.

Como todo bom operador que se preza, um operador discreto “transforma” uma entrada em uma saída. A novidade é que agora nossos sinais são seqüências:



As classificações correspondem exatamente às feitas no caso contínuo, e assim definiríamos um operador instantâneo como aquele para o qual a saída no instante  $k_0$  depende apenas da entrada nesse mesmo instante  $k_0$ , operador dinâmico é aquele para o qual a saída em  $k_0$  pode depender de valores passados, presentes e futuros:  $k < k_0, k = k_0, k > k_0$ , e assim por diante.

Os conceitos de causalidade, linearidade, invariância no tempo, etc, são definidos exatamente como no caso contínuo. As idéias são basicamente as mesmas, mudando apenas a variável tempo: antes era contínua, agora é discreta. O estudo das duas categorias segue um paralelismo quase perfeito. Também no mundo discreto os operadores causais e unilaterais podem ser associados aos sistemas relaxados.

### 1.5.1 Resposta ao impulso

Quando a entrada de um operador discreto  $H$  é a seqüência  $\{u\} = \delta(k - m)$ , um delta de Kronecker aplicado no instante  $m$ , chamamos a saída correspondente de **resposta ao impulso** do operador, e a denotamos por  $h(k, m)$ :

Quando  $\{u\} = \delta(k - m)$  então  $\{y\} = H\{u\} = H\delta(k - m) = h(k, m)$

A resposta ao impulso pode auxiliar no cálculo da resposta de alguns tipos de sistemas a uma entrada qualquer. Vejamos como. Em primeiro lugar, dada uma seqüência qualquer  $f$ , não necessariamente unilateral, podemos decompô-la em uma soma de impulsos unitários:

para isso começamos com uma realização, por exemplo a de Jordan. Para isso começamos expandindo  $P(s)$  em frações parciais:

$$P(s) = \frac{b_1}{s - \lambda_1} + \frac{b_2}{s - \lambda_2} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} b_{1,2} = \pm j(1 + 4\pi^2)/(4\pi) \\ \lambda_{1,2} = -1 \mp j2\pi \end{cases}$$

A partir daqui é fácil: sendo  $A$  uma matriz diagonal com elementos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  e  $C$  e  $B$  matrizes quaisquer tais que  $CB = b_1 + b_2$  teremos uma realização. Seja por exemplo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t); \quad y(t) = [1 \ 1] x(t)$$

Os leitores devem se convencer — fazendo as contas, por exemplo — de que apesar de  $A$  e  $B$  serem matrizes complexas esta é realmente uma realização para  $P(s)$ . E uma realização camarada, pois o formato diagonal de  $A$  permite um rápido cálculo da exponencial  $e^{At}$ :

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(-1-j2\pi)t} & 0 \\ 0 & e^{(-1+j2\pi)t} \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} e^{-j2\pi t} & 0 \\ 0 & e^{+j2\pi t} \end{bmatrix}$$

De onde podemos prosseguir ...

$$A_d = e^{AT} = \begin{bmatrix} e^{(-1-j2\pi)T} & 0 \\ 0 & e^{(-1+j2\pi)T} \end{bmatrix} = e^{-T} \begin{bmatrix} e^{-j2\pi T} & 0 \\ 0 & e^{+j2\pi T} \end{bmatrix}$$

e

$$B_d = \int_0^T e^{At} B dt = \int_0^T \begin{bmatrix} b_1 e^{\lambda_1 t} \\ b_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} dt = \dots = \frac{-1}{4\pi} \begin{bmatrix} (2\pi^2 + j)(e^{\lambda_1 T} - 1) \\ (2\pi^2 - j)(e^{\lambda_2 T} - 1) \end{bmatrix}$$

e  $C_d = C$ , de acordo com o método. A matriz de controlabilidade pode ser encontrada:

$$[B_d \ A_d B_d] = \begin{bmatrix} \alpha_1(e^{\lambda_1 T} - 1) & \alpha_1(e^{\lambda_1 T} - 1)e^{\lambda_1 T} \\ \alpha_2(e^{\lambda_2 T} - 1) & \alpha_2(e^{\lambda_2 T} - 1)e^{\lambda_2 T} \end{bmatrix}$$

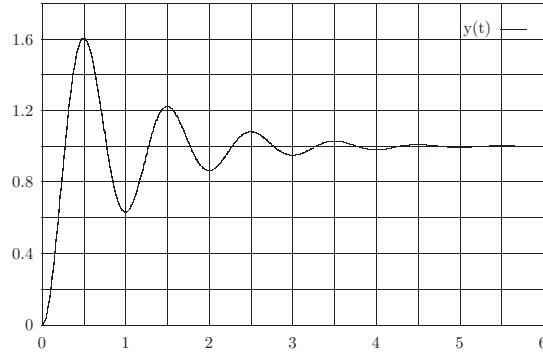
onde  $\alpha_{1,2} = -4\pi/(2\pi^2 \pm j)$ . O determinante desta matriz é

$$\alpha_1 \alpha_2 (e^{\lambda_1 T} - 1) (e^{\lambda_2 T} - 1) (e^{\lambda_2 T} - e^{\lambda_1 T})$$

que se anula, causando incontrolabilidade, quando e apenas quando



grade que permite a fácil visualização das seqüências resultantes das amostragens consideradas.



Uma análise mais detalhada deste fenômeno virá em breve. Por ora basta lembrar uma das receitas para a escolha de  $T$ : ele deve ser no mínimo 10 vezes inferior ao período associado à banda de passagem do sistema. Neste caso a banda de passagem é  $\omega_n \approx 6.4$  donde a freqüência de amostragem deve ser, no mínimo  $10\omega_n \approx 64$ , donde  $T \leq 2\pi/64$ . Usando  $T = \pi/32 \approx 0.10$  teremos

$$P_d(z) = 1 - (z - 1) \frac{z - 0.6548}{z - 0.7381 \pm j0.5234} = 0.1786 \frac{z + 0.9177}{z - 0.7381 \pm j0.5234}$$

Um único zero, dois pólos complexos conjugados, tudo como deveria ser, nada de cancelamentos e perdas de dinâmica, beleza! Os leitores podem amostrar, graficamente, a curva da figura acima para  $T = 0.1$  para perceber que a seqüência resultante tem pontos suficientes para acompanhar todas as “idas e vindas” analógicas sem pular nada.

**Exemplo 3.3.2** Para  $K = 1 + 4\pi^2 \approx 40.4784$  discretizar, pelo método da equivalência ao degrau, a planta  $P(s) = K/(s^2 + 2s + K)$ .

$$P(s) = \frac{K}{s^2 + 2s + K} = \frac{1 + 4\pi^2}{(s + 1 + j2\pi)(s + 1 - j2\pi)}$$

Sim, está correto, é o mesmo sistema de segunda ordem, sub-amortecido, do exemplo anterior. Agora usaremos a metodologia do espaço de estados;

$$\begin{aligned} f &= \dots f(-1) \quad f(0) \quad f(1) \quad f(2) \quad \dots \\ &= \dots f(-1) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots + \\ &\quad \dots 0 \quad f(0) \quad 0 \quad 0 \quad \dots + \\ &\quad \dots 0 \quad 0 \quad f(1) \quad 0 \quad \dots + \\ &\quad \dots 0 \quad 0 \quad 0 \quad f(2) \quad \dots + \dots \end{aligned}$$

Mas, lembrando o conceito de impulso unitário, cada uma das seqüências básicas acima pode ser reescrita:

$$f(k) = \dots + f(-1)\delta(k+1) + f(0)\delta(k) + f(1)\delta(k-1) + f(2)\delta(k-2) + \dots$$

Isto permite estabelecer, de modo direto, uma importante propriedade dos sinais discretos: uma seqüência qualquer pode ser obtida a partir de uma decomposição em impulsos por meio da expressão

$$\{f\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\delta(k-m)$$

Seja agora um operador  $H$  discreto e linear, submetido a uma entrada  $\{u\}$ . Se esta entrada é decomposta como acima temos

$$y = Hu = H \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\delta(k-m)$$

Como o operador é linear podemos usar o princípio da superposição:

$$y = Hu = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)H\delta(k-m)$$

Lembrando que  $H\delta(k-m) = h(k, m)$  é a resposta ao impulso do operador concluímos que sua saída para uma entrada qualquer  $u$  é dada por

$$y(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(k, m)u(m)$$

Esta é a **somatória de superposição**, que relaciona entradas e saídas de operadores discretos e lineares para os quais se conhece a resposta ao impulso. Assim como no caso contínuo, a resposta ao impulso caracteriza completamente um operador discreto e linear. Conhecendo-a conheceremos a saída para qualquer entrada.

Se o nosso operador for causal (além de linear, lógico!) teremos  $h(k, m) = 0$  para  $k < m$  e a expressão se particulariza:

$$y(k) = \sum_{m=-\infty}^k h(k, m)u(m)$$

Como seria de se esperar, a invariância no tempo é caracterizada por

$$h(k, m) = h(k - m)$$

e neste caso, temos mais uma particularização:

$$y(k) = \sum_{m=-\infty}^k h(k - m)u(m)$$

Supondo finalmente que a entrada  $u$  é unilateral temos a expressão final

$$y(k) = \sum_{m=0}^k h(k - m)u(m)$$

caracterizando a chamada **somatória de convolução**. Esta soma pode ser expressa de maneira alternativa, mudando a variável por meio de  $k - m = j$ :

$$y(k) = \sum_{j=k}^0 h(j)u(k - j)$$

Eis então ambas as expressões para a soma de convolução:

$$y(k) = \sum_{m=0}^k h(k - m)u(m) = \sum_{m=0}^k h(m)u(k - m)$$

**Exemplo 1.5.1** Em um operador linear e invariante no tempo a saída quando  $\{u\} = \delta(k)$  é dada por

$$h(k) = \begin{cases} 0 & \text{para } k \leq 0 \\ 2^k & \text{para } k \geq 1 \end{cases}$$

Calcular a sequência de saída quando a entrada é dada por

$$u(k) = \begin{cases} 0 & \text{para } k < 0 \\ k & \text{para } k \geq 0 \end{cases}$$

Analisando a resposta ao impulso  $h(k)$  verificamos que o sistema é causal, e então

Este é o efeito de pólos complexos conjugados, e poderíamos ter abreviado o desenvolvimento logo no início, ao perceber que  $\zeta < 1$ .

Para continuar o método de discretização amostramos  $y(t)$

$$a(k) = y(kT) = a + b_1 e^{\lambda_1 T k} + b_2 e^{\lambda_2 T k}$$

e obtemos sua transformada

$$A(z) = a \frac{z}{z-1} + b_1 \frac{z}{z - e^{\lambda_1 T}} + b_2 \frac{z}{z - e^{\lambda_2 T}}$$

e finalmente

$$P_d(z) = \frac{z-1}{z} A(z) = a + (z-1) \left[ \frac{b_1}{z - e^{\lambda_1 T}} + \frac{b_2}{z - e^{\lambda_2 T}} \right]$$

que pode ser simplificada até

$$P_d(z) = 1 - (z-1) \frac{z - e^{-T}(\cos 2\pi T - (1/2\pi)\sin 2\pi T)}{z - e^{-T}(\cos 2\pi T \mp j\sin 2\pi T)}$$

Calculando para  $T = 2$  encontraríamos

$$P_d(z) = 1 - (z-1) \frac{z - e^{-2}}{(z - e^{-2})^2} = \frac{1 - e^{-2}}{z - e^{-2}}$$

Opa! Houve um cancelamento e agora temos um único pólo, real, em 0.1353 e isto caracteriza uma sequência que tende — sem oscilações — ao valor de regime. Este cancelamento provoca um efeito muito desagradável chamado de **perda de dinâmica**. Para tentar evitá-lo tentemos reduzir o período de amostragem; para  $T = 1$  temos

$$P_d(z) = 1 - (z-1) \frac{z - e^{-1}}{(z - e^{-1})^2} = \frac{1 - e^{-1}}{z - e^{-1}}$$

O mesmo efeito! Agora o pólo real está em 0.3679, caracterizando uma sequência mais rápida que tende, ainda sem oscilações, ao valor de regime. Reduzindo o período de amostragem para  $T = 1/2$  temos

$$P_d(z) = 1 - (z-1) \frac{z + e^{-0.5}}{(z + e^{-0.5})^2} = \frac{1 + e^{-0.5}}{z + e^{-0.5}}$$

Ainda há cancelamento, resultando agora em um pólo único em  $-0.6065$ . Isto significa uma exponencial com valores alternados e a idéia de oscilações é mantida. Na figura abaixo está plotada a curva para  $y(t)$ , bem como uma

o sinal escada  $u(t)$ . Mas isto é terreno conhecido! Há pouquíssimas páginas atrás lidávamos com este mesmo problema e descobríamos sua solução: os métodos de equivalência ao degrau, em qualquer de suas versões.

**Em resumo:** a discretização de plantas para as técnicas discretas de projeto deve ser feita pelo método de equivalência ao degrau, seja em sua versão frequencial, trabalhando com as funções de transferência, ou na versão no espaço de estados.

#### Na frequência:

1.)  $Y(s) = P(s)/s$

2.)  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$

3.)  $a(k) = y(kT)$

4.)  $A(z) = \mathcal{Z}\{a(k)\}$

5.)  $P_d(z) = (z - 1)A(z)/z$

#### No tempo:

1.)  $A_d = e^{AT}$

2.)  $B_d = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau$

3.)  $C_d = C$

4.)  $D_d = D$

**Exemplo 3.3.1** Para  $K = 1 + 4\pi^2 \approx 40.4784$  discretizar, pelo método da equivalência ao degrau, a planta  $P(s) = K/(s^2 + 2s + K)$ .

$$P(s) = \frac{K}{s^2 + 2s + K} = \frac{1 + 4\pi^2}{(s + 1 + j2\pi)(s + 1 - j2\pi)}$$

Trata-se de um sistema de segunda ordem, sub-amortecido, com pólos complexos caracterizados por  $\omega_n = \sqrt{K} \approx 6.3623$  e  $\zeta \approx 0.1572$ . A resposta ao degrau, analógica, para este sistema pode ser encontrada de maneira simples

$$Y(s) = \frac{P(s)}{s} = \frac{a}{s} + \frac{b_1}{s + 1 + j2\pi} + \frac{b_2}{s + 1 - j2\pi}$$

onde  $a = 1$  e  $b_{1,2} = (-2\pi \mp j)/(4\pi)$ , o que acarreta

$$y(t) = a + b_1 e^{\lambda_1 t} + b_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{onde} \quad \lambda_{1,2} = -1 \mp j2\pi$$

cuja simplificação é

$$y(t) = 1 - e^{-t} \left( \frac{\sin 2\pi t}{2\pi} + \cos 2\pi t \right)$$

O gráfico desta expressão é muito conhecido e famoso: oscilações com amplitudes amortecidas tendendo a um valor de regime dado por  $K/\omega_n^2 = 1$ .

$$y(k) = \sum_{m=0}^k h(k-m)u(m)$$

donde

$$\begin{aligned} y(k) &= 0 & \forall k \leq 0 \\ y(1) &= h(1)u(0) + h(0)u(1) = 0 \\ y(2) &= h(2)u(0) + h(1)u(1) + h(0)u(2) = 2 \\ y(3) &= \dots\dots = 8 \\ y(4) &= \dots\dots = 22 \\ &\vdots & \vdots \end{aligned}$$

E assim por diante. Mais uma vez um procedimento fácil e direto, mas que envolve uma trabalhadeira bastante grande. Tudo bem, os computadores digitais estão aí para isso mesmo, exatamente para esse tipo de obra. A eles então o ônus das contas. Mas o real inconveniente deste método é que a solução é dada em forma aberta, ou seja, a somatória de convolução permite o cálculo da seqüência de saída ponto por ponto. Seria muito bom se houvesse uma expressão genérica que fornecesse o valor de  $y$  para um instante  $k$  qualquer. Para este exemplo conseguiríamos exprimir  $y$  como

$$y(k) = 2(2^k - k - 1) \quad \forall k \geq 1$$

após um trabalho cheio de artifícios sobre a somatória de convolução.

Os fatos mostrados por este exemplo são gerais. É quase sempre difícil encontrarmos uma expressão analítica para a saída e esta é uma grande desvantagem do uso das somatória de superposição no estudo de sistemas discretos: obteremos a saída na marra, ponto a ponto.

Que não nos abale uma pequenina dificuldade. Que não se percam as esperanças, pois há solução para tudo. O que nos facilitará as coisas de agora em diante é o uso das transformadas Z.

## 1.5.2 Solução por transformada Z

Sendo  $f_1$  e  $f_2$  duas seqüências a operação

$$\sum_{m=0}^k f_1(k-m)f_2(m) = f_1 \star f_2$$

é chamada de convolução discreta. Usando esta nomenclatura podemos dizer que a saída de operadores lineares e invariantes no tempo é sempre dada pela convolução entre a entrada e a resposta ao impulso, conforme demonstrado anteriormente:

$$y(k) = \sum_{m=0}^k h(k-m)u(m) = h \star u$$

Calculemos a transformada Z:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{y\} &= \mathcal{Z}\{h \star u\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^k h(k-m)u(m) \right) z^{-k} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(k-m)u(m)z^{-m}z^{m-k} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} u(m)z^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} h(k-m)z^{m-k} \\ &= \mathcal{Z}\{h\}\mathcal{Z}\{u\} \end{aligned}$$

Isto demonstra uma importante propriedade das transformadas Z; de volta ao exemplo, esta expressão pode ser usada, basta lembrar que a resposta ao impulso pode ser expressa por  $h(k) = 2^k 1(k) - \delta(k)$ . Com isto,

$$\begin{aligned} Y(z) = \mathcal{Z}\{y\} &= \mathcal{Z}\{2^k 1(k) - \delta(k)\}\mathcal{Z}\{k 1(k)\} \\ &= \left( \frac{z}{z-2} - 1 \right) \frac{z}{(z-1)^2} \\ &= \frac{2z}{(z-1)^2(z-2)} \end{aligned}$$

Achando a transformada inversa:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{-2}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{-2}{(z-1)^2} - \frac{2}{z-1} + \frac{2}{z-2}$$

Donde

$$Y(z) = \frac{-2z}{(z-1)^2} - \frac{2z}{z-1} + \frac{2z}{z-2} \implies y(k) = 2(2^k - k - 1) 1(k)$$

$$f(k) \longrightarrow \boxed{*} \longrightarrow f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\delta(t - kT)$$

A transformada de Laplace do sinal  $f^*(t)$  pode ser encontrada de maneira direta, e pode ser relacionada com a transformada de  $f(k)$ . Vejamos

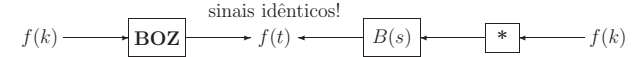
$$\mathcal{L}\{f^*(t)\} = f(0) + f(1)e^{-Ts} + \dots + f(k)e^{-kTs} + \dots = F(z)|_{z=e^{sT}}$$

Este operador estrela, compreende-se agora, nada mais é do que uma maneira de colocar em campo a conhecida relação abstrata entre os campos discreto e contínuo, simbolizada pela transformação  $z = e^{sT}$ .

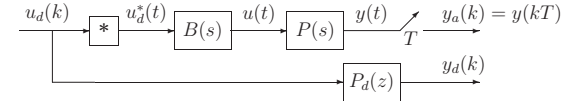
Este operador é quase sempre usado em conjunto com o “modelo analógico” do BOZ, o SLIT relaxado visto acima e descrito por

$$B(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

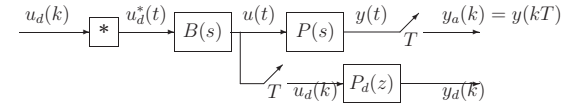
É imediato perceber que a resposta (contínua) do BOZ a uma seqüência  $f(k)$  é exatamente igual à resposta do SLIT relaxado descrito pela  $B(s)$  deduzida acima quando sua entrada é  $f^*(t)$



Após estes desenvolvimentos podemos redefinir o problema de discretização de plantas: dada  $P(s)$  encontrar  $P_d(z)$  de tal modo que as seqüências  $y_a(k)$  e  $y_d(k)$  abaixo sejam tão próximas quanto possível qualquer que seja a seqüência  $u_d(k)$



O sinal analógico  $u(t)$  é do tipo escada, constante por períodos, e, por construção, sua amostragem instantânea recupera a seqüência original  $u_d(k)$ , o que conduz a uma simplificação do diagrama acima



As seqüências  $y_a(k)$  e  $y_d(k)$  acima devem ser tão próximas quanto possível qualquer que seja a seqüência  $u_d(k)$ , ou equivalentemente, qualquer que seja

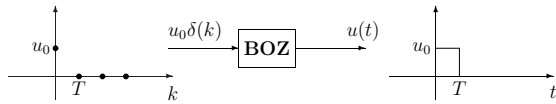
um sinal discreto, e sua saída é um sinal analógico. Como lidar com ele?

### 3.3.1 Bloqueadores de Ordem Zero

Comecemos com um caso simples, a resposta de um BOZ a um impulso discreto  $u_d(k) = u_0\delta(k)$ . Pela própria idéia do bloqueador a saída será um pulso de largura  $T$  e amplitude  $u_0$ , que pode ser expresso em termos de uma diferença de degraus:

$$u_d(k) = u_0\delta(k) \implies u(t) = u_0 1(t) - u_0 1(t - T) = u_0 [1(t) - 1(t - T)]$$

Para visualizar a situação:



Imaginemos agora um SLIT contínuo e relaxado com a capacidade de fornecer como saída um pulso idêntico ao acima quando sua entrada é um impulso de amplitude  $u_0$

$$u_0\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{SLIT}} \longrightarrow u(t) = u_0 1(t) - u_0 1(t - T)$$

É fácil perceber que a função de transferência deste sistema é dada por

$$B(s) = \frac{\mathcal{L}\{u(t)\}}{\mathcal{L}\{u_0\delta(t)\}} = \frac{u_0 \frac{1}{s} - u_0 \frac{e^{-sT}}{s}}{u_0} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

A partir de uma sinal discreto  $f(k)$  qualquer sempre podemos construir um sinal contínuo  $f^*(t)$  somando impulsos deslocados e modulados pelos valores da seqüência:

$$\begin{aligned} \{f\} &= f(0) \quad , \quad f(1) \quad , \quad \dots \quad , \quad f(k) \quad , \quad \dots \\ f^*(t) &= f(0)\delta(t) + f(1)\delta(t - T) + \dots + f(k)\delta(t - kT) + \dots \end{aligned}$$

Para formalizar esta idéia podemos definir o **Operador Estrela** ou **As-terisco** como sendo um mecanismo abstrato que transforma uma seqüência  $f(k)$  em um sinal analógico  $f^*(t)$ :

### 1.5.3 Função de Transferência Discreta

O encaminhamento usado neste último exemplo pode ser estendido, dando origem a um dos resultados mais importantes deste campo:

**Teorema 1.5.1** Para operadores discretos, lineares e invariantes no tempo sempre se pode escrever

$$Y(z) = H(z)U(z)$$

onde  $Y(z)$  é a transformada Z da saída,  $U(z)$  é a transformada Z da entrada e  $H(z)$ , chamada de **função de transferência discreta do operador**, é a transformada Z da resposta ao impulso.

A demonstração é simples. Sendo o operador LIT temos, como visto acima:

$$y(k) = \sum_{m=0}^k h(k-m)u(m) = h \star u$$

donde se conclui o desejado.

Este desenvolvimento é exatamente como no caso contínuo, talvez até mais simples do que lá. Dizemos que a função de transferência  $H(z)$  é uma ferramenta frequencial para o estudo de operadores discretos. Assim como no caso contínuo, os operadores que nos interessam são descritos por funções de transferência racionais:

$$H(z) = K \frac{n(z)}{d(z)} = K \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots}{(p - p_1)(p - p_2) \dots}$$

onde os  $z_i$  são chamados de **zeros** de  $H(z)$  e os  $p_i$  são os **pólos**.

### 1.5.4 Comportamento temporal

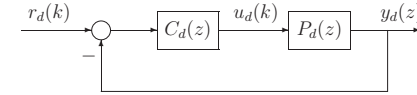
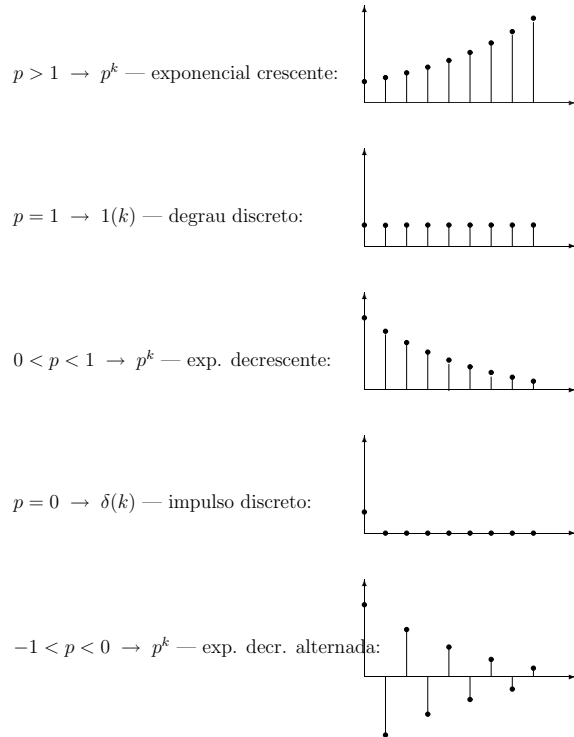
Qual é a relação entre parâmetros frequenciais como por exemplo pólos e zeros e parâmetros temporais, como por exemplo as seqüências?

$$Y(z) = H(z)U(z) = K \frac{(z - z_1) \dots}{(p - p_1) \dots}$$

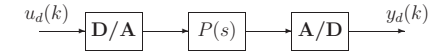
Alguns dos zeros  $z_i$  que aparecem na expressão de  $Y(z)$  são provenientes de  $H(z)$ , outros de  $U(z)$ , e o mesmo acontece com os pólos  $p_i$ . De qualquer modo, seja qual for sua origem, após expandirmos  $Y(z)/z$  em frações parciais obteremos para  $Y(z)$  a seguinte expressão, supondo pólos reais e distintos:

$$Y(z) = c_1 \frac{z}{z - p_1} + c_2 \frac{z}{z - p_2} + \dots$$

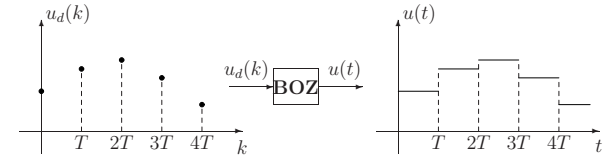
O comportamento no domínio do tempo da sequência  $y$  pode assim ser decomposto em uma soma de “comportamentos elementares”, cada um deles do tipo  $z/(z - p)$ , onde  $p \in \mathbb{R}$  representa um pólo real. Vejamos então com mais detalhes esses padrões básicos que permitem perceber o papel crucial representado pela localização dos pólos no plano complexo.



Temos que trabalhar com o sistema acima, onde todos os sinais são discretos, e procurar o compensador  $C_d(z)$ . Para chegar a este diagrama discreto partindo da planta analógica  $P(s)$  devemos começar envolvendo-a em conversores

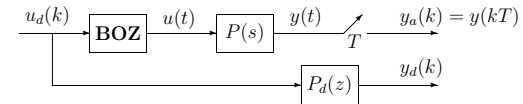


Na fase inicial do projeto a quantização e a codificação são desprezadas e o conversor A/D pode ser reduzido a um amostrador instantâneo. Podemos também considerar que o conversor D/A é composto apenas por um Bloqueador de Ordem Zero — BOZ — que mantém constante durante cada período de amostragem o valor da sequência de entrada:



gerando assim uma saída  $u(t)$  constante por períodos, ou do tipo escada.

Com estas hipóteses o problema de discretização de plantas se resume a: dada  $P(s)$  encontrar  $P_d(z)$  de tal modo que as sequências  $y_a(k)$  e  $y_d(k)$  abaixo sejam tão próximas quanto possível qualquer que seja a sequência  $u_d(k)$



Este é um problema aparentemente simples e direto, bastaria calcular a função de transferência discreta entre  $u_d(k)$  e  $y_a(k)$  e chamá-la de  $P_d(z)$ , com o que teríamos  $y_a(k) = y_d(k) \forall u_d(k)$ , uma inesperada, mas bem vinda, igualdade. A dificuldade desta empreitada é o BOZ. Da maneira como foi definido trata-se de um sistema híbrido pois sua entrada é uma sequência,

$$\text{pólo dominante: } \frac{1}{s+a} \quad \text{com } a > 0 \quad \rightarrow \quad T = \frac{1}{\beta a} \quad \beta \in [2, 4]$$

Quando há no sistema de malha fechada pólos dominantes complexos conjugados com fator de amortecimento  $\zeta \approx 0.7$  (escolha muitas vezes feita para acarretar pouco overshoot no transitório) recomenda-se freqüência de amostragem de uma a duas vezes a freqüência natural:

$$\text{pólos dominantes com } \zeta \approx 0.7 \quad \rightarrow \quad T = \frac{K}{\omega_n} \quad K \in [0.5, 1]$$

Outras receitas há e em várias outras se poderia pensar. Todas válidas para determinadas situações e inaplicáveis em outras ... Todas remanescentes de uma época um tanto quanto empírica de projeto, onde as ferramentas de apoio computacional eram frágeis e inadequadas ...

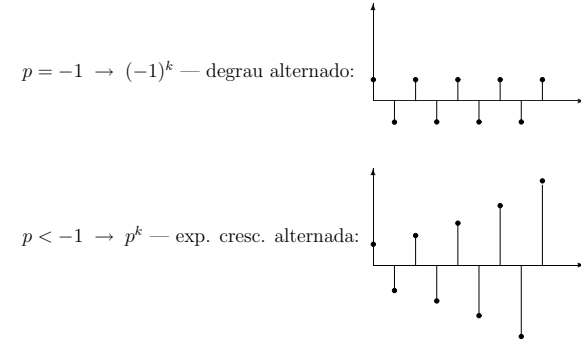
Hoje em dia, felizmente, o quadro é outro e os recursos de computação, simulação e visualização são estupendos. Donde se conclui que a receita atual sensata, o conselho valioso é: tentar e simular. O período de amostragem  $T$  passa a ser um parâmetro de projeto: tenta-se vários valores e verifica-se (por meio de simulação) qual deles funciona melhor.

### 3.3 Projeto Digital

Em toda a seção anterior tratamos das chamadas **Técnicas Analógicas** para o projeto de controladores digitais. Nelas, a planta  $P(s)$  é dada, o compensador  $C(s)$  é projetado por um método analógico qualquer dos muitos existentes, uma discretização é feita, gerando  $C_d(z)$ , e finalmente implementada.

A partir de agora entram em cena as **Técnicas Discretas** para o projeto de controladores digitais. Nelas, a planta  $P(s)$  é dada, uma discretização é feita, gerando  $P_d(z)$ , o compensador  $C_d(z)$  é projetado por um método discreto qualquer dos muitos existentes, e finalmente implementado.

Também nestas técnicas entra a discretização, apenas em um ponto diferente, anterior, da cadeia. Poderíamos pensar em selecionar um dentre os métodos já vistos, mas há aqui alguns detalhes específicos que afetarão a escolha, simplificando-a. Para entendê-los vamos supor que a planta discretizada  $P_d(z)$  já foi obtida e estamos na fase do projeto propriamente dito.

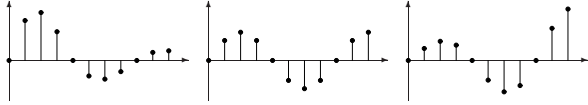


Vejamos agora a contribuição de pólos reais duplos, ou seja, termos básicos do tipo  $z/(z-p)^2$ , onde  $p \in \mathbb{R}$ . Seria fácil verificar (tentem!) que a transformada inversa é dada por  $k p^k$ . A partir disto algumas conclusões são evidentes. Para  $|p| > 1$  temos seqüências que tendem para  $\infty$  quando  $k$  cresce; se  $p > 1$  então a seqüência é sempre positiva, mas se  $p < -1$  os valores se alternam.

Para  $p = 1$  temos a rampa discreta  $k$  e para  $p = -1$  a rampa discreta alternada  $k(-1)^k$ . Para  $0 < p < 1$  o esboço é visto a seguir, e para  $-1 < p < 0$  seria a mesma seqüência com valores alternados. Finalmente para  $p = 0$  temos um impulso discreto deslocado.



O comportamento associado a pólos complexos conjugados depende de suas distâncias à origem: para pólos dentro do disco de raio unitário (como por exemplo  $p_{1,2} = 0,60 \pm j0,60$ ) teremos oscilações senoidais amortecidas, ou seja, com amplitudes decrescentes. Para pólos sobre a circunferência de raio unitário (como por exemplo  $p_{1,2} = \sqrt{2}/2 \pm j\sqrt{2}/2$ ) teremos oscilações senoidais com amplitudes constantes, e para pólos fora do disco de raio unitário (como por exemplo  $p_{1,2} = 0,80 \pm j0,80$ ) teremos oscilações senoidais com amplitudes crescentes. Os gráficos:

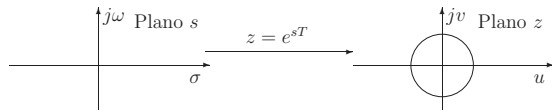


### 1.5.5 Estabilidade

Uma adaptação direta das idéias contínuas pode ser feita. Diremos que um operador discreto é BIBO estável se e somente se a cada sequência  $u$  limitada a saída  $y$  correspondente também é limitada.

**Teorema 1.5.2** *Um operador discreto, linear e invariante no tempo será BIBO estável se e somente se todos os pólos de sua função de transferência estiverem contidos no círculo unitário com centro na origem do plano complexo.*

Uma demonstração rigorosa será omitida, mas uma análise dos comportamentos básicos vistos na seção anterior permite uma aceitação suave da condição. Podemos também lembrar a relação entre as transformadas de Laplace e Z, vista anteriormente:  $z = e^{sT}$ , onde  $T$  é o período de amostragem. Com isto o eixo imaginário seria mapeado na circunferência unitária, e o semi-plano esquerdo seria mapeado no círculo unitário, reforçando ainda mais o entendimento do resultado acima.



Se o campo contínuo possui os critérios de Routh e o de Hurwitz para verificar se os pólos estão na região permitida, o campo discreto pode usar o critério de Jury, com a mesma finalidade.

### 1.5.6 Pequena pausa. . .

... para analisar o que temos visto até este ponto neste campo discreto. Nosso objetivo primordial tem sido, como sempre, o de ser capazes de prever saídas de operadores submetidos a entradas quaisquer. Eis um inventário comentado dos principais métodos vistos.

*As fórmulas são conhecidas, e são simples. A aplicação delas a exemplos como estes pode, entretanto, ser bastante trabalhosa. Mas para isso existem computadores, e então, leitores, vamos lá, ao cálculo de  $A_d$ ,  $B_d$  e  $C_d$ ! Depois desta etapa calculem a função de transferência discreta associada*

$$C_d(z) = C_d(zI - A_d)^{-1}B_d$$

*Qual dos métodos anteriores fornecia um resultado que bate com este?*

### 3.2.7 Escolha do Período de Amostragem

Existe uma idéia, certamente baseada na aplicação do teorema da Amostragem para o processamento de sinais, de que quanto menor o período de amostragem  $T$  melhor, pois isto leva a um comportamento mais “próximo” do analógico.

Se queremos recuperar um sinal a partir de suas amostras este raciocínio vale, mas para Controle Digital é preciso um certo cuidado, pois há dois aspectos que podem ir contra esta tendência, e que precisam ser analisados.

O primeiro, fácil de entender e aceitar, é que para valores muito pequenos de  $T$  o computador pode não ter tempo suficiente para fazer todas as operações necessárias para adquirir dados, convertê-los, tratá-los (por meio do algoritmo de controle), reconvertê-los e devolvê-los à planta.

O segundo aspecto diz respeito aos erros de quantização, inevitáveis em qualquer processo de conversão A/D. O fato, triste, é que estes erros podem ser aumentados quando  $T$  diminui . . .

O custo de se reduzir  $T$  também deve ser levado em conta. Isto mostra que a escolha não é tão simples, é há valores mínimos para o período de amostragem, valores abaixo do qual não se pode ir.

Existem algumas “receitas” empíricas, que funcionam bem em determinados casos específicos. Quando, por exemplo, se sabe que o sistema de malha fechada deve apresentar, após a conclusão do projeto, uma determinada faixa de passagem  $B$ , recomenda-se usar uma frequência de amostragem 10 vezes superior:

$$\frac{1}{T} \approx 10B$$

Quando se sabe que há, ou deve haver, um pólo dominante real em  $-a$  para o sistema compensado, recomenda-se um período de amostragem de 25% a 50% da constante de tempo (dada por  $1/a$ ):



$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t); \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

A exponencial matricial  $e^{At}$  poderia ser calculada a partir, por exemplo, da matriz  $(sI - A)^{-1}$ , resultando em

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

donde calculáramos, sem grandes sacrifícios:

$$A_d = e^{AT} = \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}$$

e, com um pouquinho mais de ranger de dentes

$$B_d = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-\tau} \\ e^{-2\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 1 - e^{-T} \\ (1 - e^{-2T})/2 \end{bmatrix}$$

Como  $C_d = C$  o trabalho estaria terminado.

É lógico que poderíamos ter resolvido este problema usando um caminho alternativo:

$$C(sI - A)^{-1}B = \dots = \frac{2s + 3}{(s + 1)(s + 2)} \rightarrow \text{métodos anteriores}$$

Os leitores são convidados a prosseguir: apliquem os métodos fornecidos, encontrem suas respostas e verifiquem qual delas corresponde à solução do espaço de estado discreto, dada por

$$C_d(zI - A_d)^{-1}B_d$$

**Exemplo 3.2.12** Discretizar o compensador contínuo dado por

$$C(s) = 2 \frac{(s + 1)(s + 2)}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 2s^2 + 2s}$$

Para este velho conhecido, de cinco outras ocasiões, agora precisaríamos encontrar, por um método qualquer, uma realização. Usando, por exemplo, o método que fornece a realização na forma Canônica Controlável, teríamos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

**Soma de Superposição**, se o operador em questão é linear: funciona bem, mas é um método aberto, razoavelmente trabalhoso, devemos verificar a linearidade do operador e precisamos conhecer  $h(k, m)$ , a resposta ao impulso, o que implica em ensaios de identificação.

**Soma de Convolução**, se o operador em questão é linear e invariante no tempo: funciona bem, mas também é um método aberto, trabalhoso, devemos verificar, além da linearidade do operador, a sua invariância no tempo e precisamos conhecer  $h(k - m)$ , a resposta ao impulso, o que implica em ensaios preliminares.

**Função de transferência**, se o operador em questão é linear e invariante no tempo: talvez o método mais cômodo, pois fornece a resposta em forma fechada, e de maneira simples, mas requer a verificação da linearidade e da invariância no tempo; exige o conhecimento de  $H(z)$ , que pode ser obtido a partir da resposta ao impulso, ou por meio de resposta em frequência.

Todos estes métodos se restringem ao caso linear. Haveria algum tipo de modelo matemático mais geral, que pudesse ser aplicado a operadores não lineares? Na realidade esta pergunta pode — e deve! — ser ainda mais abrangente: por que limitar o campo aos operadores, ou seja, aos sistemas relaxados? como encontrar modelos que tratem do caso mais geral de **sistemas** discretos não necessariamente relaxados?

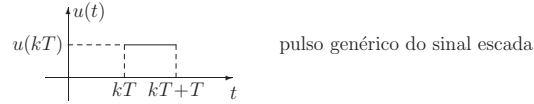
## 1.6 Sistemas Discretos

Até este ponto apenas os sistema relaxados foram vistos, embora tenham sido raramente mencionados de modo explícito, sempre se escondiam atrás dos operadores, seus dignos e eficientes modelos matemáticos. A partir de agora cai a restrição de relaxamento, e podemos nos dedicar ao caso mais geral de condições iniciais não nulas.

### 1.6.1 Um sistema discreto real

Nas primeiras páginas, já remotas, usamos como exemplo de sistema discreto uma caderneta de poupança:





Os resultados anteriores, especificamente a expressão (3.2), podem ser usados agora, gerando

$$\begin{cases} x(kT + T) = e^{AT}x(kT) + \left[ \int_0^T e^{A\tau} B d\tau \right] u(kT) \\ y(kT) = Cx(kT) + Du(kT) \end{cases}$$

Vamos supor que as seqüências  $u_d$ ,  $x_d$  e  $y_d$  resultam da amostragem instantânea (com período  $T$ ) dos sinais contínuos  $u(t)$ ,  $x(t)$  e  $y(t)$ , respectivamente. Isto significa que,  $\forall k = 0, 1, 2, \dots$

$$u_d(k) = u(kT), \quad x_d(k) = x(kT), \quad y_d(k) = y(kT)$$

e que equação acima pode ser reescrita como

$$\begin{cases} x_d(k+1) = e^{AT}x_d(k) + \left[ \int_0^T e^{A\tau} B d\tau \right] u_d(k) \\ y_d(k) = Cx_d(k) + Du_d(k) \end{cases}$$

Em resumo: quando um SLIT analógico é alimentado por um sinal  $u(t)$  do tipo escada a sua saída  $y(t)$  e o seu estado  $x(t)$  podem ser calculados — exatamente — nos instantes  $t = kT$  por meio da equação dinâmica discreta acima. Para outros valores de  $t$  este cálculo exato pode não ser tão simples.

Uma pergunta natural surge: conhecendo a solução  $x_d$  da equação discreta acima conheceremos  $x(kT)$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$  mas seria isto suficiente para conhecermos  $x(t) \forall t$ ? A resposta é dada pelo teorema da Amostragem, e depende do valor de  $T$ , como bem lembramos. Mas algo independe deste período de amostragem: mesmo quando  $T$  viola os requisitos da amostragem segura, os valores da seqüência  $x_d$  sempre coincidirão exatamente com as amostras de  $x(t)$  nos instantes  $kT$ .

A discretização de sistemas descritos por equação dinâmicas segue os mesmos princípios básicos anteriores. Seja então o sistema analógico

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

As equações a diferenças representam, no campo discreto, o mesmo papel representado no campo contínuo pelas equações diferenciais. As equações (a diferenças ou diferenciais) são a melhor e mais completa maneira de expressar o conhecimento que se tem de um dado sistema. Elas devem ser utilizadas sempre que possível.

A forma geral de uma equação a diferenças de ordem  $n$  é

$$y(k) = f(y(k-1), \dots, y(k-n), u(k), \dots, u(k-n), k)$$

Este é o chamado **formato atrasado** das equações a diferenças, porque o valor “atual” das grandezas, associado ao instante  $k$ , depende dos valores anteriores  $k-1, \dots, k-n$ . Para que haja uma solução única para a relação acima precisaremos das condições iniciais:  $y(-1), y(-2), \dots, y(-n)$ .

Estaremos interessados apenas em um caso particular, as equações a diferenças lineares e invariantes no tempo — EDLITs. A forma geral de um equação de diferenças de ordem  $n$  (no formato atrasado) é

$$\begin{aligned} y(k) = & -a_1y(k-1) - a_2y(k-2) - \dots - a_ny(k-n) \\ & + b_0u(k) + b_1u(k-1) + \dots + b_nu(k-n) \end{aligned}$$

É comum apresentar esta expressão, bem como as condições iniciais necessárias, após um reordenamento:

$$\begin{cases} y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_ny(k-n) = b_0u(k) + \dots + b_nu(k-n) \\ y(-1), y(-2), \dots, y(-n) \end{cases}$$

Para analisar a solução destas equações retomemos o exemplo da caderneta de poupanças, com depósitos mensais de 50 unidades; isto significa que  $u(k) = 50 \cdot 1(k)$ . Supondo que as taxas de juros mensais são de  $J = 0,33\%$ , o dinheiro varia de acordo com a equação

$$y(k) = 1,0033y(k-1) + 50 \cdot 1(k)$$

### Solução iterativa das EDLITs

É uma solução passo a passo, em forma aberta. Escrevemos a equação base para valores sucessivos de  $k$ , a partir de 0. A primeira etapa é

$$y(0) = 1,0033y(-1) + 50$$

Qual é o significado de  $y(-1)$ ? É o saldo no mês  $-1$ , mas o que quer dizer isto? Suponha que o titular da conta recebeu um presente de seu pai, 500 “mangos”, e resolveu empregá-los como o depósito inicial (algumas instituições exigem um depósito inicial):  $y(-1) = 500$ . É lógico que se considerássemos  $y(-1) = 0$  e embutíssemos os 500 no primeiro depósito —  $u(1) = 500 + 50$  — as coisas permaneceriam inalteradas.<sup>1</sup>

De qualquer modo, para resolver a equação precisamos conhecer  $y(-1)$ , a condição inicial. Usando  $y(-1) = 500$  teremos

$$\begin{aligned} y(0) &= 551,65 \\ y(1) &= 1,0033y(0) + 50 = 603,47 \\ y(2) &= 1,0033y(1) + 50 = 655,46 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Funciona, claro, mas é maçante e demorado, pois se trata de uma solução em forma aberta. Trabalho típico para computadores.

### Solução das EDLITs por transformada Z

Usando a transformada Z e suas propriedades temos

$$\mathcal{Z}\{y(k)\} = 1,0033\mathcal{Z}\{y(k-1)\} + 50\mathcal{Z}\{1(k)\}$$

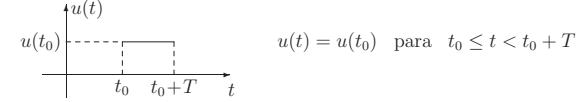
$$Y(z) = 1,0033 \left( z^{-1}Y(z) + y(-1) \right) + 50 \frac{z}{z-1}$$

$$(1 - 1,0033z^{-1})Y(z) = 1,0033y(-1) + 50 \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = \left( 501,65 + \frac{50z}{z-1} \right) \frac{1}{1 - 1,0033z^{-1}}$$

$$Y(z) = 551,65 \frac{z(z-0,91)}{(z-1)(z-1,0033)}$$

<sup>1</sup>Há ainda uma outra maneira de encarar  $y(-1)$ : supondo que  $k = 0$  foi escolhido para representar um mês qualquer, não necessariamente o mês de abertura da conta, então  $y(-1)$  representa o saldo no mês anterior.



Aplicando a fórmula (3.1) para  $t = t_0$  teremos, trivialmente,  $x(t) = x(t_0)$ ; para  $t = t_0 + T$  somos levados a

$$x(t_0 + T) = e^{AT}x(t_0) + \left[ \int_{t_0}^t e^{A(t_0+T-\xi)} B d\xi \right] u(t_0)$$

A mudança de variáveis  $\tau = t_0 + T - \xi$  acarreta

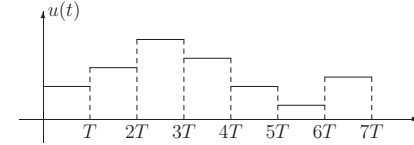
$$x(t_0 + T) = e^{AT}x(t_0) - \left[ \int_T^0 e^{A\tau} B d\tau \right] u(t_0)$$

ou, finalmente, a

$$x(t_0 + T) = e^{AT}x(t_0) + \left[ \int_0^T e^{A\tau} B d\tau \right] u(t_0) \quad (3.2)$$

Esta equação nos diz que o valor do estado  $x$  no final do intervalo (para  $t = t_0 + T$ ) pode ser obtido de maneira simples e linear a partir dos valores iniciais (para  $t = t_0$ ) do estado e da entrada.

Vejamos agora o efeito de uma entrada **constante por partes**, também chamada de constante por períodos ou do tipo escada; são somas de pulsos constantes, adjacentes e de mesma largura:



Quando um sinal analógico como este é aplicado a um SLIT contínuo o cálculo de sua saída  $y(t)$  e de seu estado  $x(t)$  nos instantes  $t = kT$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$  pode ser feito com muita facilidade, o que provavelmente não é verdadeiro para outros valores de  $t$ . Para entender isto consideremos um pulso genérico do sinal acima:

A partir desta tabela perceberíamos que períodos de amostragem muito baixos ( $T \rightarrow 0$ ) continuam com a tendência de levar pólos e zeros ao ponto  $+1$ , donde

$$\lim_{T \rightarrow 0} C_d(z) = K_d \frac{(z-1)(z-1)}{(z-1)(z^2-2z+1)} \approx K_d \frac{1}{z-1}$$

Este caso ainda tem pouco interesse prático, pois o ganho  $K_d$  também se aproxima de zero.

Para períodos de amostragem muito grandes alguns métodos podem ser prgsos, por levarem pólos e/ou zeros da região analógica “estável” para fora do disco unitário. Os leitores, mais uma vez, são convidados a pensar no que acontece para este caso.

Para entradas em degrau unitário este método tem um comportamento perfeito, pelo simples motivo de ter sido criado exatamente para isso!

**Exemplo 3.2.10** Usando o método da equivalência ao degrau encontrar o substituto discreto para o compensador analógico  $C(s) = 1/(s^3+3s^2+3s+1)$ .

### 3.2.6 Discretização no Espaço de Estados

Quando o compensador analógico é descrito por equações dinâmicas pode-se pensar em achar a  $C(s)$  correspondente e aplicar um dos métodos anteriores, mas existe um método que trabalha diretamente com os parâmetros do espaço de estados. Antes de descrevê-lo, relembremos alguns fatos básicos. Seja um SLIT contínuo descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Diz a teoria que para conhecer  $x(t)$ , o valor do estado  $x$  no instante  $t$ , precisamos conhecer  $x(t_0)$  e  $u(t)$  para  $t \in [t_0, t]$ ; usaríamos a conhecida fórmula

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\xi)}Bu(\xi)d\xi \quad (3.1)$$

Consideremos como entrada o seguinte pulso constante de largura  $T$ :

$$Y(z) = -15045 \frac{z}{z-1} + 15596,65 \frac{z}{z-1,0033}$$

$$y(k) = -15045 \cdot 1(k) + 15596,65 \cdot (1,0033)^k$$

A forma fechada procurada: maneira cômoda e rápida de encontrar os valores da saída para instantes genéricos.

#### Função de Transferência a partir das EDLITs

Supondo CIs nulas na forma geral das EDLITs, ou seja:  $y(-1) = y(-2) = \dots = y(-n) = 0$  podemos achar as transformadas:

$$Y(z) + a_1 z^{-1}Y(z) + \dots + a_n z^{-n}Y(z) = b_0 U(z) + b_1 z^{-1}U(z) + \dots + b_n z^{-n}U(z)$$

ou então

$$(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n})Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n})U(z)$$

Finalmente:

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}U(z)$$

#### Equações a Diferenças Equivalentes

Seja a equação na forma atrasada

$$\begin{cases} y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + \dots + b_n u(k-n) \\ y(-1) = \alpha_1, \quad y(-2) = \alpha_2, \quad \dots \quad y(-n) = \alpha_n \end{cases}$$

Esta equação pode ser encarada como uma ferramenta para se obter uma seqüência de saída  $\{y\}$  a partir do conhecimento de uma seqüência de entrada  $\{u\}$  e das CIs. No particular caso de CIs nulas a resolução da equação por meio da transformada Z levaria, conforma já vimos, a

$$Y(z) = H(z)U(z) \quad \text{onde} \quad H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

Mudando as escalas de tempo tanto de  $\{y\}$  como de  $\{u\}$  é razoável esperar que tudo permaneça inalterado. Bem, por que “esperar” que nada se altere? Vamos fazer a mudança e verificar o que acontece. Sejam então  $\{w\}$  e  $\{v\}$

as seqüências obtidas ao se deslocar  $\{y\}$  e  $\{u\}$ , respectivamente,  $n$  instantes para a direita:

$$\begin{aligned} \{y\} &\rightarrow Q_n\{y\} = \{w\} \rightarrow w(k) = y(k-n) \\ \{u\} &\rightarrow Q_n\{u\} = \{v\} \rightarrow v(k) = u(k-n) \end{aligned}$$

É imediato perceber que a relação entre estas duas novas seqüências é

$$\begin{cases} w(k+n) + a_1w(k+n-1) + \dots + a_nw(k) = b_0v(k+n) + \dots + b_nv(k) \\ w(n-1) = \alpha_1, \quad w(n-2) = \alpha_2, \dots \quad w(0) = \alpha_n \end{cases}$$

Esta equação é chamada de **equação de ordem  $n$  no formato adiantado**, por motivos óbvios. Percebemos que as condições iniciais que aconteciam em instantes negativos para  $k$  passam a acontecer agora em instantes positivos:  $w(0); w(1); \dots w(m-1)$ .

Achando as transformadas  $z$  e supondo CIs nulas:

$$z^n W(z) + a_1 z^{n-1} W(z) + \dots + a_n W(z) = b_0 z^n V(z) + \dots + b_n V(z)$$

donde

$$W(z) = G(z)V(z) \quad \text{onde} \quad G(z) = \frac{b_0 z^n + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

Multiplicando numerador e denominador por  $z^{-n}$  concluímos que  $G(z) = H(z)$ , logo as duas formas são indistintas, pelo menos no que concerne à função de transferência. A forma avançada apresenta um ponto interessante, suas condições iniciais  $w(0), w(1), \dots w(n-1)$  acontecem em valores positivos de  $k$ , o que é mais natural para sinais unilaterais, e permitem evitar o que acontece no caso atrasado, onde temos  $y(-1), y(-2), \dots y(-m)$ , ou seja, valores de  $y$  em instantes  $k < 0$ .

A forma atrasada é normalmente usada em filtros digitais, ao passo que a forma avançada é usada no espaço de estados e em controle digital.

**Exemplo 1.6.1** Para a caderneta de poupança podemos considerar o mês atual como  $k+1$  e escrever

$$y(k+1) = 1,0033y(k) + u(k)$$

O cálculo de  $y$ , iterativo ou por transformada  $Z$ , se faria de modo análogo ao anterior.

$$U(s) = 2 \frac{s^2 + 3s + 2}{s(s^2 + 2s + 2)} \frac{1}{s} \implies u(t) = [1 + 2t - \sqrt{2}e^{-t} \sin(t + \pi/4)]1(t)$$

Amostrando  $u(t)$  temos

$$a(k) = u(kT) = 1 + 2Tk - \sqrt{2}e^{-Tk} \sin(Tk + \pi/4)$$

cuja transformada  $Z$  pode ser obtida, com auxílio de tabelas, por exemplo, resultando em

$$A(z) = \frac{z}{z-1} + 2T \frac{z}{(z-1)^2} - z \frac{z + e^{-T}(\sin T - \cos T)}{z^2 - 2e^{-T} \cos T z + e^{-2T}}$$

donde

$$C_d(z) = \frac{z-1}{z} A(z) = 1 + 2T \frac{1}{z-1} - (z-1) \frac{z + e^{-T}(\sin T - \cos T)}{z^2 - 2e^{-T} \cos T z + e^{-2T}}$$

O desenvolvimento desta expressão levaria a

$$C_d(z) = K_d \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z-1)(z^2 - 2e^{-T} \cos T z + e^{-2T})}$$

onde os zeros  $z_{1,2}$  são funções complicadas de  $T$  e o ganho discreto  $K_d$  é dado por

$$K_d = 1 + 2T - e^{-T}(\sin T + \cos T)$$

A função  $C_d(z)$  tem apenas dois zeros, e o pólo analógico na origem continua sendo mapeado no pólo discreto  $+1$ , independentemente do período de amostragem (como nos casos anteriores). Os leitores são convidados a examinar  $|p_{1,2}|$ , ou seja, o módulo dos outros pólos, para valores positivos de  $T$ , para verificar se este método preserva, pelo menos para este exemplo, a estabilidade. Apresentamos abaixo um quadro com os resultados para alguns valores de  $T$ :

$T$	$K_d$	zero #1	zero #2	pólo	pólos complexos
8.00	16.9997	0.0591	-0.0004	1.0000	-0.000 ± j0.0003
4.00	9.0258	0.0872	0.0054	1.0000	-0.0123 ± j0.0144
2.00	4.9333	0.1903	-0.1324	1.0000	-0.0561 ± j0.1233
1.00	2.4917	0.3925	0.0251	1.0000	0.1997 ± j0.3105
0.50	1.1769	0.6124	0.3350	1.0000	0.5323 ± j0.2910
0.10	0.2093	0.9049	0.8182	1.0000	0.9001 ± j0.0905
0.05	0.1024	0.9512	0.9048	1.0000	0.9506 ± j0.0485
0.01	0.0201	0.9900	0.9802	1.0000	0.9900 ± j0.0902

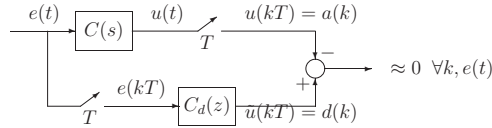
$$= \frac{1}{\left[\frac{2(z+1)}{T(z-1)} + 1\right]^3} = \frac{T^3(z-1)^3}{[2(z+1) + T(z-1)]^3}$$

*O excesso de pólos de  $C_d(z)$  é zero, pois também este método trapezoidal adiciona zeros no compensador discreto mesmo quando não há zeros no analógico! E assim aqueles atrasos desagradáveis de métodos anteriores podem ser evitados.*

### 3.2.5 Método da Equivalência ao Degrau

Uma boa maneira para verificar a qualidade dos métodos apresentados até agora é testá-los para entradas padronizadas: acionamos  $C(s)$  e  $C_d(z)$  com entradas de teste e comparamos a sequência de saída do compensador discreto com a amostragem do sinal de saída do analógico. Em todos os exemplos anteriores fizemos uso desse expediente, ao comparar os desempenhos para entradas em degrau, e isso nos ajudou a julgar os méritos dos métodos.

A idéia básica do presente algoritmo é impor a igualdade das respostas ao degrau analógica e discreta. A ele, pois, e para começar, repetimos uma figura básica:



Para entrada em degrau unitário temos  $U(s) = C(s)E(s) = C(s)/s$ , donde

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} \quad \text{donde} \quad a(k) = u(kT) \quad \text{donde} \quad A(z) = \mathcal{Z}\{a(k)\}$$

A amostragem de  $e(t)$  é um degrau discreto, logo  $D(z) = C_d(z)z/(z-1)$  e como queremos  $d(k) = a(k)$ :

$$C_d(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\{a(k)\}$$

A explicação é simples e direta, termina aqui; para julgar a facilidade de aplicação, exemplos.

**Exemplo 3.2.9** *Encontrar o substituto discreto para o compensador analógico  $C(s) = (2s^2 + 6s + 4)/(s^3 + 2s^2 + 2s)$ . A resposta ao degrau para este sistema já foi calculada anteriormente:*

### 1.6.3 Equações Dinâmicas Discretas

O conceito de estado, com todas as suas vantagens, também pode (e deve!) ser definido para os sistemas discretos. A teoria é perfeitamente análoga e leva às seguintes equações para um sistema discreto linear e causal:

$$\begin{cases} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k) \\ x(k_0) &= x^0 \end{cases}$$

onde  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  é um vetor com  $n$  componentes, as matrizes tem dimensões compatíveis, etc. Se o nosso sistema for ainda invariante no tempo:

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \\ x(k_0) &= x^0 \end{cases}$$

Temos agora equações a diferenças e não diferenciais. A “dinamicidade” está implícita apenas em  $x(k+1)$ , quando antes estava na derivada  $\dot{x}$ , que media as tendências do sistema. No caso discreto  $x(k+1)$  representa esse papel, mostrando como calcular o próximo estado.

A obtenção das equações dinâmicas para um sistema descrito por equações a diferenças pode ser ilustrada por um exemplo:

$$\begin{cases} y(k+3) - 3y(k+2) + 3y(k+1) - y(k) = u(k) \\ y(0) = \alpha; y(1) = \beta; y(2) = \gamma \end{cases}$$

Como a ordem da equação é 3 devemos escolher 3 variáveis auxiliares; uma possível escolha seria  $x_1(k) = y(k)$ ,  $x_2(k) = y(k+1)$  e  $x_3(k) = y(k+2)$ , que levaria a

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= y(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) &= y(k+2) = x_3(k) \\ x_3(k+1) &= y(k+3) = x_1(k) - 3x_2(k) + 3x_3(k) + u(k) \end{aligned}$$

Usando notação matricial chegamos a

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

Chamando de  $x(k)$  o vetor acima com componentes  $x_i(k)$  podemos identificar as matrizes  $A$  e  $B$  e escrever

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

onde a matriz é obtida lembrando que  $y(k) = x_1(k)$ , ou seja  $C = [1 \ 0 \ 0]$  e  $x_0 = [\alpha \ \beta \ \gamma]^T$ .

Em uma comparação com o caso contínuo associaríamos  $x(k+1)$  à derivada  $\dot{x}(t)$  o que nos permite notar o importante papel desempenhado pela forma avançada das equações a diferenças: elas permitem uma interpretação suave do espaço de estados no caso discreto.

Lembremos ainda o conceito de estado: o conhecimento dos valores atuais do estado e da entrada —  $x(k)$  e  $u(k)$  — permite calcular o valor futuro do estado  $x(k+1)$ . A forma avançada deixa bem clara essa idéia de valor futuro.

A solução para as equações dinâmicas é obtida mais facilmente do que no caso contínuo. Vejamos, para começar, a REN; para isso consideremos a equação homogênea:

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) \\ y(k) &= Cx(k) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

Usando a expressão básica  $x(k+1) = Ax(k)$  repetidas vezes para  $k = -1, 0, 1, 2, \dots$  encontraríamos

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x(1) &= Ax(0) = Ax_0 \\ x(2) &= Ax(1) = A^2x_0 \\ x(3) &= Ax(2) = A^3x_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Para o instante genérico  $k$  teremos

$$x(k) = A^k x_0 \quad \text{e para a saída} \quad y(k) = C A^k x_0$$

que caracterizam a Resposta à entrada nula. Para a REZ, seja o sistema relaxado

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \\ x(0) &= x_0 = 0 \end{cases}$$

Para períodos de amostragem muito grandes alguns métodos podem ser perigosos, por levarem pólos e/ou zeros da região analógica “estável” para fora do disco unitário. Assim como o anterior, este método — no que diz respeito a esse aspecto — é seguro. E os leitores, mais uma vez, são convidados a pensar em uma demonstração formal para este fato.

Para entrada em degrau unitário já vimos que a saída em regime é  $u_r(t) = (1+2t)1(t)$ . Amostrando esta rampa temos a sequência de saída “analógica”:  $a(k) = u_r(kT) = (1+2Tk)1(k)$ .

Acionando o substituto discreto com um degrau unitário temos

$$\tilde{U}(z) = K_d \frac{(z+1)(z-z_1)(z-z_2)}{(z-1)(z-p_1)(z-p_2)} \frac{z}{z-1}$$

donde tiramos

$$\frac{\tilde{U}(z)}{z} = K_d \frac{(z+1)(z-z_1)(z-z_2)}{(z-1)^2(z-p_1)(z-p_2)}$$

Expandindo em frações parciais vem

$$\frac{\tilde{U}(z)}{z} = K_d \left( \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{(z-1)^2} + \frac{b_1}{z-p_1} + \frac{b_2}{z-p_2} \right)$$

Os coeficientes  $b_1$  e  $b_2$  representam oscilações transitórias, com amplitudes que decrescem, e assim, apenas os coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  nos interessam. A solução em regime seria então

$$\tilde{U}(z) = K_d \left( a_1 \frac{z}{z-1} + a_2 \frac{z}{(z-1)^2} \right)$$

que fornece a sequência de saída discreta  $d(k) = \tilde{u}(kT)$ :

$$d(k) = K_d(a_1 + a_2 k)1(k) = K_d a_1 \left( 1 + \frac{a_2}{a_1} k \right) 1(k)$$

Os leitores são insistentemente convidados (mais uma vez!) a calcular os coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  para comparar as sequências  $d(k)$  e  $a(k)$ . Este método propicia uma resposta ao degrau sem erros?

**Exemplo 3.2.8** Encontrar o substituto discreto para o compensador analógico  $C(s) = 1/(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)$ .

$$C_d(z) = C(s) \Big|_{s=\frac{2(z-1)}{T(z-1)}} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} \Big|_{s=\frac{2(z-1)}{T(z-1)}}$$



**Exemplo 3.2.7** Encontrar o substituto discreto para o compensador analógico  $C(s) = (2s^2 + 6s + 4)/(s^3 + 2s^2 + 2s)$ . Aplicando a fórmula de conversão:

$$C_d(z) = C(s) \Big|_{s=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}} = 2 \frac{s^2 + 3s + 2}{s(s^2 + 2s + 2)} \Big|_{s=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}}$$

$$= K_d \frac{(z+1)(z-z_1)(z-z_2)}{(z-1)(z-p_1)(z-p_2)} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} K_d = T \frac{T^2+3T+2}{T^2+2T+2} \\ z_1 = \frac{2-T}{2+T} \\ z_2 = \frac{1-T}{1+T} \\ p_{1,2} = \frac{2-T^2}{T^2+2T+2} \pm j \frac{2T}{T^2+2T+2} \end{cases}$$

A função  $C_d(z)$  tem novamente três zeros, um deles sempre em  $-1$  e os outros como acima. É interessante notar que, para  $T > 0$  (a região de interesse) temos  $|z_{1,2}| < 1$  ou seja, estes zeros estão dentro do disco unitário. O pólo analógico na origem continua sendo mapeado no pólo discreto  $+1$  independentemente do período de amostragem (como nos casos anteriores) e os outros pólos como acima. Também aqui temos  $|p_{1,2}| < 1$  para valores positivos de  $T$  ou seja, este método preserva, pelo menos para este exemplo, a estabilidade. Apresentamos abaixo um quadro com os resultados para alguns valores de  $T$ :

$T$	zero	zero #1	zero #2	pólo	pólos complexos
8.00	-1.00	-0.6000	-0.7778	1.00	$-0.7561 \pm j0.1951$
4.00	-1.00	-0.3333	-0.6000	1.00	$-0.5385 \pm j0.3077$
2.00	-1.00	0.0000	-0.3333	1.00	$-0.2000 \pm j0.4000$
1.00	-1.00	0.3333	0.0000	1.00	$0.2000 \pm j0.4000$
0.50	-1.00	0.6000	0.3333	1.00	$0.5385 \pm j0.3077$
0.10	-1.00	0.9048	0.8182	1.00	$0.9005 \pm j0.0905$
0.05	-1.00	0.9512	0.9048	1.00	$0.9501 \pm j0.0476$
0.01	-1.00	0.9901	0.9802	1.00	$0.9900 \pm j0.0099$

Fazendo  $T \rightarrow 0$  perceberíamos que períodos de amostragem muito baixos continuam com a tendência de levar pólos e zeros ao ponto  $+1$ , apenas agora há um zero fixo, donde

$$\lim_{T \rightarrow 0} C_d(z) = K_d \frac{(z+1)(z^2 - 2z + 1)}{(z-1)(z^2 - 2z + 1)} \approx K_d \frac{z+1}{z-1}$$

Este caso ainda tem pouco interesse prático, pois o ganho  $K_d$  também se aproxima de zero.

Usando a expressão básica  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  repetidas vezes para  $k = -1, 0, 1, 2, \dots$  percebemos como a solução para as equações dinâmicas neste caso discreto pode ser obtida mais facilmente do que no caso contínuo. Vejamos:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(1) &= Bu(0) \\ x(2) &= ABu(0) + Bu(1) \\ x(3) &= A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2) \\ &\vdots \\ x(k) &= A^{k-1}Bu(0) + \dots + ABu(k-2) + Bu(k-1) \end{aligned}$$

Para o instante genérico  $k$  teremos

$$x(k) = \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j) \quad \text{e para a saída} \quad y(k) = C \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j)$$

Como a solução completa é a soma da REZ e da REN teremos

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j)$$

e para a saída

$$y(k) = C A^k x(0) + C \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j)$$

A facilidade com que se deduz estas expressões deve ser apontada; no caso contínuo a tarefa correspondente era bem mais intrincada, lembram?

Estas expressões, embora importantes, são expressões em forma aberta, ou seja, empregando-as para obter a solução normalmente se encontra séries difíceis de exprimir em forma fechada, séries onde o cômputo manual de  $A^k$  se revela uma tarefa longa e/ou entediante. Isto faz com que sua utilidade prática, principalmente para o cálculo das soluções em instantes elevados de  $k$ , dependa da disponibilidade de recursos computacionais. Para obter uma solução em forma fechada, que possa ser aplicada indistintamente a quaisquer valores de  $k$ , o remédio é, novamente, o emprego das transformadas em  $z$ . Usando-as na equação dinâmica de estado:

$$zX(z) - zx(0) = AX(z) + BU(z)$$

$$zX(z) - AX(z) = BU(z) + zx(0)$$

$$X(z) = (zI - A)^{-1} [BU(z) + zx(0)]$$

Entrando agora com a equação para a saída  $y$  vem

$$Y(z) = C(zI - A)^{-1}BU(z) + Cz(zI - A)^{-1}x_0$$

Esta é uma expressão em forma fechada que permite a obtenção da sequência  $y$  a partir da sequência  $u$  e das CIs. No caso relaxado, quando  $x_0 = 0$ , teremos

$$Y(z) = C(zI - A)^{-1}BU(z)$$

expressão esta que nos ensina a calcular a matriz de transferência discreta de um sistema discreto descrito por suas equações dinâmicas.

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B$$

**Exemplo 1.6.2** Para o sistema discreto abaixo calcular  $y(217)$  quando a entrada é um degrau unitário.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k); \quad y(k) = [1 \ 1]x(k)$$

A aplicação das fórmulas abertas gera

$$x(217) = A^{217}x_0 + \sum_{j=0}^{216} A^{(216-j)}Bu(j)$$

Supondo CIs nulas a expressão para  $y$  fica

$$y(217) = C \sum_{j=0}^{216} A^{(216-j)}Bu(j)$$

Destrinchar isto à mão livre, sem qualquer apoio de bits&bytes domesticados é desencorajador... A função de transferência, nossa salvação, é

$$H(z) = [1 \ 1] \begin{bmatrix} z & -1 \\ -1 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [1 \ 1] \frac{1}{z^2 - z - 1} \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ 1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Conhecendo a transformada de  $u$  chegamos a

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z+1}{z^2 - z - 1} \frac{z}{z-1}$$

A partir deste ponto o caminho é suave, como vocês certamente verificarão.

**Exemplo 3.2.6** Encontrar o substituto discreto para o compensador analógico  $C(s) = 1/(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)$ .

$$\begin{aligned} C_d(z) &= C(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{Tz}} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} \Big|_{s=\frac{z-1}{Tz}} \\ &= \frac{1}{(1/T^3 z^3)(z-1)^3 + (3/T^2 z^2)(z-1)^2 + (3/Tz)(z-1) + 1} \\ &= \frac{T^3 z^3}{(z-1)^3 + 3Tz(z-1)^2 + 3T^2 z^2(z-1) + T^3 z^3} \end{aligned}$$

Se a entrada  $e(t)$  do compensador analógico for um degrau unitário  $1(t)$  sua saída  $u(t)$  será  $u(t) = [1 - (1+t+0.5t^2)e^{-t}]1(t)$ , como visto anteriormente. Trata-se de um sinal limitado, que tende para um valor de regime dado por  $u_r = 1$  após os transitórios. Amostrando  $e(t)$  e entrando com esta sequência no compensador discreto temos

$$\tilde{U}(z) = \frac{T^3 z^3}{(z-1)^3 + 3Tz(z-1)^2 + 3T^2 z^2(z-1) + T^3 z^3} \frac{z}{z-1}$$

Aplicando o teorema do valor final podemos encontrar o valor de regime da sequência associada:

$$\tilde{u}_r = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \tilde{U}(z) = 1$$

como deveria mesmo, sem depender de  $T$ . Para estudar o transitório basta notar que o excesso de pólos de  $C_d(z)$  é zero, por obra e graça deste método retangular avançado, que adicionou zeros no compensador discreto mesmo que zeros não houvesse no analógico! E assim aqueles atrasos desagradáveis dos métodos anteriores foram evitados.

### 3.2.4 Método Trapezoidal: Newton-Raphson

O método anterior apresentou vantagens sobre o segundo, que já era melhor do que o primeiro, será que podemos esperar métodos cada vez melhores? Trabalhem agora com o algoritmo numérico de integração trapezoidal, chamado de Newton-Raphson e representado pela fórmula  $s \leftrightarrow 2(z-1)/(T(z+1))$ . O compensador discreto seria então

$$C_d(z) = C(s) \Big|_{s=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}}$$

Refazendo os exemplos anteriores:

Fazendo  $T \rightarrow 0$  perceberíamos que períodos de amostragem muito baixos continuam com a tendência de levar pólos e zeros ao ponto +1, apenas agora há um zero fixo, donde

$$\lim_{T \rightarrow 0} C_d(z) = \frac{K_d z(z^2 - 2z + 1)}{(z - 1)(z^2 - 2z + 1)} \approx \frac{K_d z}{z - 1}$$

Este caso ainda tem pouco interesse prático, pois o ganho  $K_d$  também se aproxima de zero.

Para períodos de amostragem muito grandes o método anterior era perigoso, pois podia levar pólos e/ou zeros da região analógica “estável” para fora do disco unitário. Isto não acontece neste exemplo, e nem em qualquer outro: este método — no que diz respeito a esse aspecto — é seguro. Os leitores são convidados a pensar em uma demonstração formal para este fato.

Analisemos o comportamento da discretização quando a entrada é um degrau. Já vimos que, em regime, quando a amplitude das oscilações amortecidas for desprezível, teremos  $u_r(t) = (1 + 2t)1(t)$ . Amostrando esta rampa temos a seqüência de saída “analógica”:  $a(k) = u_r(kT) = (1 + 2Tk)1(k)$ .

Acionando o substituto discreto com um degrau unitário temos  $\tilde{U}(z) =$

$$2T \frac{1 + 3T + 2T^2}{1 + 2T + 2T^2} \frac{z}{z - 1} \frac{[z - (1 + T)^{-1}][z - (1 + 2T)^{-1}]}{[z - (1 + T + jT)^{-1}][z - (1 + T - jT)^{-1}]} \frac{z}{z - 1}$$

onde tiramos

$$\frac{\tilde{U}(z)}{z} = K_d \frac{z[z - (1 + T)^{-1}][z - (1 + 2T)^{-1}]}{(z - 1)^2[z - (1 + T + jT)^{-1}][z - (1 + T - jT)^{-1}]}$$

que pode ser expandida em frações parciais, resultando

$$K_d \left( \frac{a_1}{z - 1} + \frac{a_2}{(z - 1)^2} + \frac{b_1}{z - (1 + T + jT)^{-1}} + \frac{b_2}{z - (1 + T - jT)^{-1}} \right)$$

Os coeficientes  $b_1$  e  $b_2$  representam oscilações transitórias, com amplitudes que decrescem, e assim, apenas os coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  nos interessam. A solução em regime seria então

$$\tilde{U}(z) = K_d \left( a_1 \frac{z}{z - 1} + a_2 \frac{z}{(z - 1)^2} \right)$$

que fornece a seqüência de saída discreta  $d(k) = \tilde{u}(kT)$ :

$$d(k) = K_d(a_1 + a_2 k)1(k) = K_d a_1 \left( 1 + \frac{a_2}{a_1} k \right) 1(k)$$

Os leitores são insistentemente convidados a calcular os coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  para comparar as seqüências  $d(k)$  e  $a(k)$ . Este método propicia uma resposta ao degrau sem erros?

Vimos assim que os sistema contínuos e discretos são estruturalmente muito semelhantes. Ambos podem ser representados por uma quádrupla de matrizes  $\langle A, B, C, D \rangle$  de dimensões compatíveis. A partir delas a passagem para uma descrição externa é feita da mesma maneira:

$$G(\xi) = C(\xi I - A)^{-1}B + D \quad \begin{cases} \xi = s & \longrightarrow \text{caso contínuo} \\ \xi = z & \longrightarrow \text{caso discreto} \end{cases}$$

O estado inicial, no caso discreto, vem multiplicado por  $z$ , sendo esta uma diferença com relação ao caso contínuo, mas o estudo dos dois campos segue sempre paralelo: tudo que acontece em um encontrará eco equivalente no outro.

Como a descrição interna é a mais poderosa percebemos, com um pouquinho de abstração, que os conceitos de “contínuo” e “discreto” perdem um pouco o significado. Basta conhecermos as matrizes  $A, B, C$  e  $D$  e poderemos estudar todas as possíveis propriedades que as interligam sem nos preocuparmos com a natureza dos sistemas sob consideração.

## 1.7 Realizações

Qualquer diagrama de blocos que represente uma função de transferência  $H(z)$  será chamado de **realização**. Há várias possíveis maneiras de se realizar uma dada  $H(z)$ . Na realidade há infinitas maneiras, vejamos algumas delas.

**Exemplo 1.7.1** Para  $H(z) = 1/(z^2 + z + 1)$ , lembrando a expressão básica  $Y(z) = H(z)U(z)$  temos  $(z^2 + z + 1)Y(z) = U(z)$ . A partir daqui é fácil escrever uma equação a diferenças:

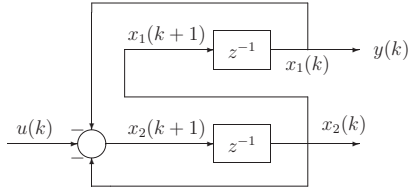
$$\begin{cases} y(k + 2) + y(k + 1) + y(k) = u(k) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Para encontrar uma equação dinâmica podemos escolher as seguintes variáveis de estado:

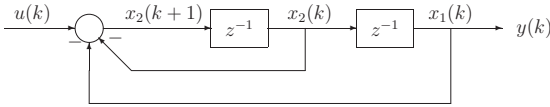
$$\begin{aligned} x_1(k) &= y(k) & \rightarrow & x_1(k + 1) = y(k + 1) = x_2(k) \\ x_2(k) &= y(k + 1) & \rightarrow & x_2(k + 1) = y(k + 2) = -x_1(k) - x_2(k) + u(k) \end{aligned}$$

Ao invés de exprimir estas equações em forma matricial lembremos que o operador  $z^{-1}$  atrasa de uma unidade as seqüências que o alimentam. Assim, se a seqüência  $x_i(k + 1)$  for a entrada de um destes blocos, a saída será

$x_i(k)$ . Fica fácil perceber que as expressões acima podem ser visualizadas pelo diagrama



Este diagrama pode ser refeito:



Chegamos a esta realização por meio de uma representação de estados para a equação a diferenças. Poder-se-ia demonstrar que a **toda** realização sempre se pode associar uma equação dinâmica, mas isto foge ao escopo deste texto. Em outras palavras, dada uma  $H(z)$  se conseguirmos representá-la por meio de uma equação dinâmica caracterizada pelas matrizes  $A, B, C, D$  teremos daqui um diagrama de blocos, ou seja, uma realização.

**Exemplo 1.7.2** Seja  $H(z) = (z^2 + 3z + 2)/(z^3 - z^2/2 - z/2)$ . A equação a diferenças associada é

$$\begin{cases} y(k+3) - \frac{1}{2}y(k+2) - \frac{1}{2}y(k+1) = u(k+2) + 3u(k+1) + 2u(k) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Para encontrar uma equação dinâmica podemos escolher as seguintes variáveis de estado:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= y(k) \\ x_2(k) &= y(k+1) + \alpha_1 u(k) \\ x_3(k) &= y(k+2) + \alpha_1 u(k+1) + \alpha_2 u(k) \end{aligned}$$

onde os valores de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  seriam calculados de modo a eliminar os termos  $u(k+1)$  e  $u(k+2)$  das expressões dos  $x_i(k+1)$ . O resultado final seria

$$\tilde{u}_r = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{T^3}{(z-1)^3 + 3T(z-1)^2 + 3T^2(z-1) + T^3} \frac{z}{z-1} = 1$$

como deveria mesmo, sem depender de  $T$ . Para estudar o transitório basta notar que o excesso de pólos de  $C_d(z)$  é 3, como no exemplo anterior, e os problemas de atrasos ainda estarão presentes ...

### 3.2.3 Métodos Retangulares: Euler avançado

O método anterior já apresentou vantagens sobre o primeiro, vejamos agora o método baseado no outro algoritmo numérico de integração, chamado de Euler avançado e representado pela fórmula  $s \leftrightarrow (z-1)/(Tz)$ . O compensador discreto seria então

$$C_d(z) = C(s)|_{s=\frac{z-1}{Tz}}$$

Refazendo os exemplos anteriores:

**Exemplo 3.2.5** Encontrar o substituto discreto para o compensador analógico  $C(s) = (2s^2 + 6s + 4)/(s^3 + 2s^2 + 2s)$ . Aplicando a fórmula de conversão:

$$\begin{aligned} C_d(z) &= C(s)|_{s=\frac{z-1}{Tz}} = 2 \frac{s^2 + 3s + 2}{s(s^2 + 2s + 2)} \Big|_{s=\frac{z-1}{Tz}} \\ &= 2 \frac{(1/T^2 z^2)(z-1)^2 + (3/Tz)(z-1) + 2}{(1/T^3 z^3)(z-1)^3 + (2/T^2 z^2)(z-1)^2 + (2/Tz)(z-1)} \\ &= 2T \frac{1 + 3T + 2T^2}{1 + 2T + 2T^2} \frac{z}{z-1} \frac{[z - (1+T)^{-1}][z - (1+2T)^{-1}]}{[z - (1+T+jT)^{-1}][z - (1+T-jT)^{-1}]} \end{aligned}$$

A função  $C_d(z)$  tem agora três zeros, um deles sempre na origem e os outros em  $(1+T)^{-1}$  e  $(1+2T)^{-1}$ , o pólo analógico na origem continua sendo mapeado no pólo discreto  $+1$  independentemente do período de amostragem (como nos casos anteriores) e os outros pólos em  $(1+T \pm jT)^{-1}$ . Apresentamos abaixo um quadro com os resultados para alguns valores de  $T$ :

$T$	zero	zero # 1	zero #2	pólo	pólos complexos
8.00	0.00	0.1111	0.0588	1	$0.0621 \pm j0.0552$
4.00	0.00	0.2000	0.1111	1	$0.1220 \pm j0.0976$
2.00	0.00	0.3333	0.2000	1	$0.2308 \pm j0.1538$
1.00	0.00	0.5000	0.3333	1	$0.4000 \pm j0.2000$
0.50	0.00	0.6667	0.5000	1	$0.6000 \pm j0.2000$
0.10	0.00	0.9091	0.8333	1	$0.9016 \pm j0.0820$
0.05	0.00	0.9524	0.9091	1	$0.9502 \pm j0.0452$
0.01	0.00	0.9901	0.9804	1	$0.9900 \pm j0.0098$

Quando o período de amostragem  $T$  é escolhido de modo a preservar a “estabilidade” dos pólos (leitores, descubram a condição, para os dados deste exemplo) os coeficientes  $b_1$  e  $b_2$  estarão associados a oscilações transitórias, com amplitudes que decrescem, e assim, apenas os coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  nos interessam. A solução em regime seria então

$$\tilde{U}(z) = 2T \left( a_1 \frac{z}{z-1} + a_2 \frac{z}{(z-1)^2} \right)$$

que fornece a seqüência de saída discreta  $d(k) = \tilde{u}(kT)$ :

$$d(k) = 2T(a_1 + a_2 k)1(k) = 2Ta_1 \left( 1 + \frac{a_2}{a_1} k \right) 1(k)$$

O cálculo dos coeficientes fornece  $a_1 = 1/(2T)$  e  $a_2 = 1$  dando origem a

$$d(k) = 2T \frac{1}{2T} \left( 1 + \frac{1}{1/(2T)} k \right) 1(k) = (1 + 2Tk)1(k) = a(k)$$

Este método propicia uma resposta ao degrau sem erros. Lembrando a visualização geométrica deste método de Euler atrasado percebemos o porque disto: para entrada constantes o erro da aproximação é nulo.

**Exemplo 3.2.4** Encontrar o substituto discreto para o compensador analógico  $C(s) = 1/(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)$ .

$$\begin{aligned} C_d(z) &= C(s)|_{s=\frac{1}{T}(z-1)} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} \Big|_{s=\frac{1}{T}(z-1)} \\ &= \frac{1}{(1/T^3)(z-1)^3 + (3/T^2)(z-1)^2 + (3/T)(z-1) + 1} \\ &= \frac{T^3}{(z-1)^3 + 3T(z-1)^2 + 3T^2(z-1) + T^3} \end{aligned}$$

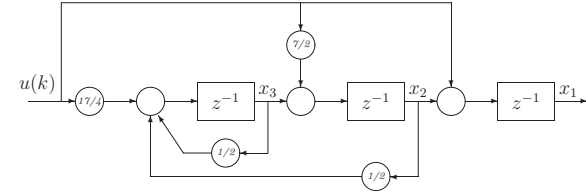
Se a entrada  $e(t)$  do compensador analógico for um degrau unitário  $1(t)$  sua saída  $u(t)$  será  $u(t) = [1 - (1 + t + 0.5t^2)e^{-t}]1(t)$ , como visto anteriormente. Trata-se de um sinal limitado, que tende para um valor de regime dado por  $u_r = 1$  após os transitórios. Amostrando  $e(t)$  e entrando com esta seqüência no compensador discreto temos

$$\tilde{U}(z) = \frac{T^3}{(z-1)^3 + 3T(z-1)^2 + 3T^2(z-1) + T^3} \frac{z}{z-1}$$

Aplicando o teorema do valor final podemos encontrar o valor de regime da seqüência associada:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) + (7/2) u(k) \\ x_3(k+1) &= (1/2) x_2(k) + (1/2) x_3(k) + (17/4) u(k) \end{aligned}$$

Lembrando que  $y(k) = x_1(k)$  podemos estabelecer o diagrama



**Exemplo 1.7.3** Seja  $H(z) = (z^2 + 3z + 2)/(z^3 - z^2/2 - z/2)$ , a mesma do caso anterior. Fatorando o numerador e o denominador e expandindo em frações parciais temos

$$Y(z) = \frac{(z+1)(z+2)}{z(z-1)(z+1/2)} U(z) = -\frac{4}{z} U(z) + \frac{4}{z-1} U(z) - \frac{1}{z+0,5} U(z)$$

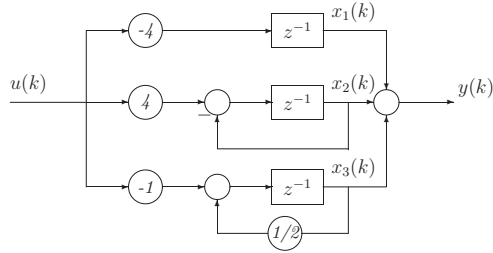
Nomeando as parcelas como abaixo podemos escrever

$$\begin{aligned} X_1(z) &= -4U(z)/z & \Rightarrow & zX_1(z) = -4U(z) \\ X_2(z) &= 4U(z)/(z-1) & \Rightarrow & (z-1)X_2(z) = 4U(z) \\ X_3(z) &= -U(z)/(z+0,5) & \Rightarrow & (z+0,5)X_3(z) = -U(z) \end{aligned}$$

donde se pode escrever três equações a diferenças:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= -4u(k) \\ x_2(k+1) - x_2(k) &= 4u(k) \\ x_3(k+1) + 0,5x_3(k) &= -u(k) \end{aligned}$$

Deste ponto a obtenção do diagrama de blocos é imediata:



Com prática, este estágio intermediário de se encontrar as variáveis de estado pode ser ignorado. Nas deve-se sempre ter em mente que a cada realização (diagrama de blocos) existe uma equação dinâmica associada.

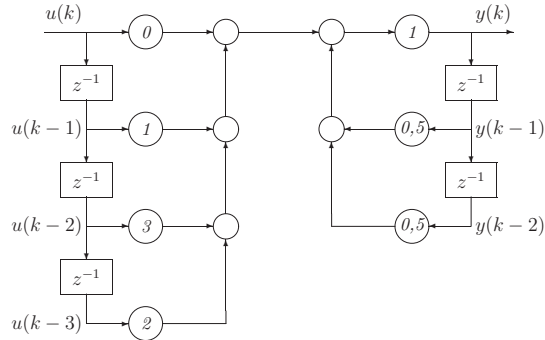
**Exemplo 1.7.4** Seja ainda uma vez  $H(z) = (z^2 + 3z + 2)/(z^3 - z^2/2 - z/2)$ , a mesma dos casos anteriores. Multiplicando numerador e denominador por  $z^{-3}$  somos levados a

$$H(z) = \frac{z^2 + 3z + 2}{z^3 - 0,5z^2 - 0,5z} = \frac{z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3}}{1 - 0,5z^{-1} - 0,5z^{-2}}$$

Mas  $Y(z) = H(z)U(z)$ , donde  $(1 - 0,5z^{-1} - 0,5z^{-2})Y(z) = (z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3})U(z)$  e pode-se escrever a equação a diferenças

$$y(k) = 0,5y(k-1) + 0,5y(k-2) + u(k-1) + 3u(k-2) + 2u(k-3)$$

O valor presente de  $y$  depende dos valores passados de  $u$  e de  $y$ . Fica simples desenhar o diagrama



$T$	zero #1	zero #2	pólo	pólos complexos
8.00	-7.00	-15.00	1	$-7.00 \pm j8.00$
4.00	-3.00	-7.00	1	$-3.00 \pm j4.00$
2.00	-1.00	-3.00	1	$-1.00 \pm j2.00$
1.00	0.00	-1.00	1	$0.00 \pm j1.00$
0.50	0.50	0.00	1	$0.50 \pm j0.50$
0.10	0.90	0.80	1	$0.90 \pm j0.10$
0.05	0.95	0.90	1	$0.95 \pm j0.05$
0.01	0.99	0.98	1	$0.99 \pm j0.01$

Fazendo  $T \rightarrow 0$  perceberíamos que períodos de amostragem muito baixos conduzem ao mesmo resultado do método anterior:

$$\lim_{T \rightarrow 0} C_d(z) = \frac{K_d(z^2 - 2z + 1)}{(z-1)(z^2 - 2z + 1)} \approx \frac{K_d}{z-1}$$

ou seja, pólos e zeros se concentram no ponto +1. Este caso tem pouco interesse prático, pois o ganho  $K_d = 2T$  também se aproxima de zero.

Quando usamos períodos de amostragem muito grandes o maior inconveniente deste método se torna claro, como se pode ver na tabela acima: pólos analógicos “estáveis” podem ser mapeados fora do disco unitário!

Analisemos o comportamento da discretização quando a entrada é um degrau. Já vimos que, em regime, quando a amplitude das oscilações amortecidas for desprezível, teremos  $u_r(t) = (1 + 2t)1(t)$ . Amostrando esta rampa temos a sequência de saída “analógica”  $a(k)$ :

$$u_r(t) = (1 + 2t)1(t) \quad a(k) = u_r(kT) = (1 + 2Tk)1(k)$$

Acionando o substituto discreto com um degrau unitário temos

$$\tilde{U}(z) = C_d(z) \frac{z}{z-1} = 2T \frac{(z-1+T)(z-1+2T)}{(z-1)[z^2 + 2(T-1)z + 2T^2 - 2T + 1]} \frac{z}{z-1}$$

donde tiramos

$$\frac{\tilde{U}(z)}{z} = 2T \frac{z^2 + (3T-2)z + 2T^2 - 3T + 1}{(z-1)^2[z^2 + 2(T-1)z + 2T^2 - 2T + 1]}$$

Expandindo em frações parciais vem

$$\frac{\tilde{U}(z)}{z} = 2T \left( \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{(z-1)^2} + \frac{b_1}{z-1+T+jT} + \frac{b_2}{z-1+T-jT} \right)$$

O método do mapeamento, apesar de ser de fácil implementação, mostra estes inconvenientes: o cálculo do ganho discreto pode ser mais trabalhoso do que o dos pólos e zeros, e pode haver erros não desprezíveis, de regime e/ou transitórios. Sempre se pode pensar em “salvar” o método, usando períodos de amostragem pequenos, ou então procurando condições de saídas limitadas, ou ainda adicionando zeros extras para eliminar atrasos, mas talvez estes esforços sejam vãos, pois há outros métodos disponíveis. A estes pois.

### 3.2.2 Métodos Retangulares: Euler atrasado

No estudo dos métodos numéricos de integração já vimos que a relação fundamental entre os mundos contínuo e discreto,  $z \leftrightarrow e^{sT}$  ou então  $s \leftrightarrow (1/T) \ln z$  admite aproximações simples e facilmente implementáveis, como por exemplo  $s \leftrightarrow (1/T)(z - 1)$  chamada de Euler atrasada. O compensador discreto seria então

$$C_d(z) = C(s)|_{s=\frac{1}{T}(z-1)}$$

Refazendo os exemplos anteriores:

**Exemplo 3.2.3** Encontrar o substituto discreto para o compensador analógico  $C(s) = (2s^2 + 6s + 4)/(s^3 + 2s^2 + 2s)$ . Aplicando a fórmula de conversão:

$$\begin{aligned} C_d(z) &= C(s)|_{s=\frac{1}{T}(z-1)} = 2 \frac{s^2 + 3s + 2}{s(s^2 + 2s + 2)} \Big|_{s=\frac{1}{T}(z-1)} \\ &= 2 \frac{(1/T^2)(z-1)^2 + (3/T)(z-1) + 2}{(1/T^3)(z-1)^3 + (2/T^2)(z-1)^2 + (2/T)(z-1)} \\ &= 2T \frac{z^2 + (3T-2)z + 2T^2 - 3T + 1}{(z-1)[z^2 + 2(T-1)z + 2T^2 - 2T + 1]} \end{aligned}$$

O ganho 2 é mapeado em  $K_d = 2T$ , os zeros vão para  $1 - T$  e  $1 - 2T$ , o pólo analógico na origem é mapeado no pólo discreto  $+1$  independentemente do período de amostragem (como no caso anterior) e os outros pólos em  $1 - T \pm jT$ . Apresentamos abaixo um quadro com os resultados para alguns valores de  $T$ :

Esta realização não é muito econômica, pois usa 5 atrasadores unitários ao passo que as anteriores usavam apenas 3. Para consertar esse pequeno incômodo lançaremos mão de um pequeno truque.

**Exemplo 1.7.5** A expressão básica pode ser reescrita como

$$Y(z) = \frac{z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3}}{1 - 0,5z^{-1} - 0,5z^{-2}} U(z) = (z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3})\xi(z)$$

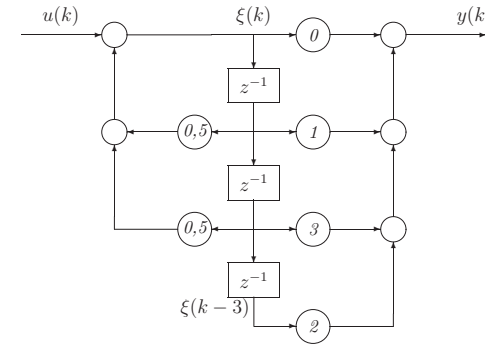
Isto significa que

$$\begin{cases} Y(z) = (z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3})\xi(z) \\ U(z) = (1 - 0,5z^{-1} - 0,5z^{-2})\xi(z) \end{cases}$$

e temos duas equações a diferenças:

$$\begin{cases} y(k) = \xi(k-1) + 3\xi(k-2) + 2\xi(k-3) \\ u(k) = \xi(k) - 0,5\xi(k-1) - 0,5\xi(k-2) \end{cases}$$

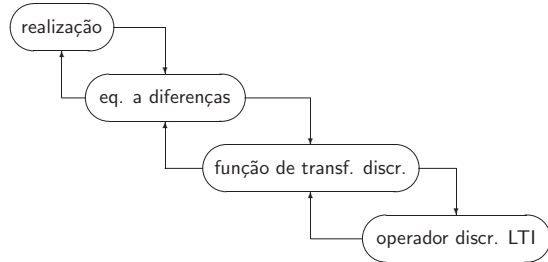
Esta realização trabalha com valores passados apenas da variável  $\xi$  e isto explica porque é mais econômica. Seu diagrama:



E poderíamos prosseguir nesta batida, procurando e encontrando diferentes realizações. Qual delas seria a melhor? Difícil dizer, mas estes exemplos sugerem algo: para esta função de transferência, mais de três atrasadores

unitários unitários em uma realização configuram um desperdício. Em situações mais gerais se poderia demonstrar que existe um número mínimo de elementos atrasadores para se construir realizações; no caso dos exemplos este número é 3 e diríamos que as **realizações mínimas** possuem ordem 3.

Muito bem, tudo isto é certamente interessante, mas o que mais há nas realizações? seriam elas apenas um interessante passatempo matemático? Não, elas servem também a outros propósitos. Para captar o sentido físico das realizações devemos concordar que olhar para uma realização é a mesma coisa que olhar para uma equação a diferenças, que é a mesma coisa que olhar para uma função de transferência discreta, que é a mesma coisa que olhar para um operador discreto LTI.



Uma realização expõe os mecanismos internos de um sistema discreto, tornando explícita a maneira pela qual ele trata e transforma as seqüências de entrada em seqüências de saída. Com isto em mente, e buscando uma análise mais sutil e profunda, olhemos mais uma vez para o diagrama de uma realização, como o seguinte:

Se a entrada  $e(t)$  do compensador analógico for um degrau unitário  $1(t)$  sua saída  $u(t)$  será

$$U(s) = C(s)E(s) = \frac{1}{s(s+1)^3} \implies u(t) = [1 - (1+t+0.5t^2)e^{-t}]1(t)$$

Trata-se de um sinal limitado, que tende para um valor de regime dado por  $u_r = 1$  após os transitórios. Amostrando  $e(t)$  e entrando com esta seqüência no compensador discreto temos

$$\tilde{U}(z) = C_d(z)\mathcal{Z}\{e(kT)\} = \frac{K_d}{(z - e^{-T})^3} \frac{z}{z - 1}$$

Aplicando o teorema do valor final podemos encontrar o valor de regime da seqüência associada:

$$\tilde{u}_r = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{K_d}{(z - e^{-T})^3} \frac{z}{z - 1} = \frac{K_d}{(1 - e^{-T})^3}$$

E a situação é realmente melhor, pois a cada valor de  $T$  o ganho discreto  $K_d$  pode ser escolhido de modo a termos as seqüências discreta e analógica tendendo ao mesmo valor de regime. E o transitório, que se pode dizer dele? Calculemos o valor inicial da seqüência  $\tilde{u}$ :

$$\tilde{u}(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{U}(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{K_d}{(z - e^{-T})^3} \frac{z}{z - 1} = 0$$

O valor inicial da seqüência avançada de uma unidade  $\tilde{u}_1 = Q_1 \tilde{u}$  pode ser calculado por meio de

$$\tilde{u}_1(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} z \tilde{U}(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{K_d z}{(z - e^{-T})^3} \frac{z}{z - 1} = 0$$

Mas  $\tilde{u}_1(0) = \tilde{u}(1)$ , e usando o raciocínio acima podemos verificar que

$$\tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = \tilde{u}(2) = 0$$

Isto significa que a seqüência de saída do compensador  $C_d(z)$  apenas começa a se manifestar a partir de  $k = 3$ . Atrasos deste tipo acontecem sempre que existir um excesso de pólos no compensador analógico, pois como este método é incapaz de criar pólos ou zeros tal excesso também existirá no compensador discretizado.



$$\frac{\tilde{U}(z)}{z} = K_d \left( \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{(z-1)^2} + \frac{b_1}{z - e^{(-1-j)T}} + \frac{b_2}{z - e^{(-1+j)T}} \right)$$

Os coeficientes  $b_1$  e  $b_2$  estão associados a oscilações transitórias, com amplitudes que decrescem, e assim, apenas os coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  nos interessam. A solução em regime seria então

$$\tilde{U}(z) = K_d \left( a_1 \frac{z}{z-1} + a_2 \frac{z}{(z-1)^2} \right)$$

que fornece a seqüência de saída discreta  $d(k) = \tilde{u}(kT)$ :

$$d(k) = K_d(a_1 + a_2 k)1(k) = K_d a_1 \left( 1 + \frac{a_2}{a_1} k \right) 1(k)$$

Os coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  foram calculados para os mesmos valores do período de amostragem, dando origem a

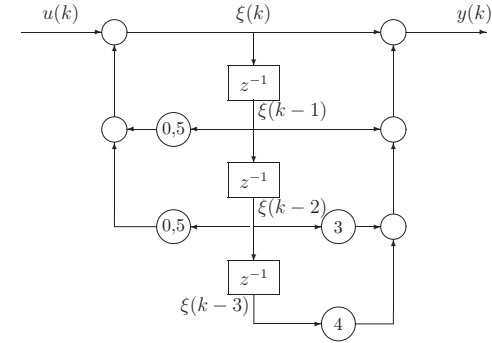
$T$	$a(k)$	$d(k)$
4.0073	$1 + 8.0146k$	$0.0408K_d(1 + 23.4951k)$
2.0794	$1 + 4.1588k$	$0.2221K_d(1 + 3.4097k)$
1.0986	$1 + 2.1972k$	$0.3849K_d(1 + 1.9057k)$
0.6932	$1 + 1.3863k$	$0.6032K_d(1 + 1.2931k)$
0.4055	$1 + 0.8110k$	$1.0692K_d(1 + 0.7900k)$
0.0953	$1 + 0.1906k$	$5.0189K_d(1 + 0.1903k)$

Apenas para valores baixos do período de amostragem o ganho discreto  $K_d$  pode ser escolhido de modo a ajustar a seqüência discreta à solução analógica: para  $T = 0.0953$  basta escolher  $K_d = 0.1993$  e teremos  $d(k) \approx a(k)$ . Para os outros valores tabelados fica difícil escolher valores adequados de  $K_d$ , pois as rampas terão ou pontos de partida ou inclinações diferentes.

O fato de a saída do compensador ser crescente pode ter causado estas dificuldades. No próximo exemplo veremos um sinal limitado, o que se revelará mais camarada. Mas uma outra fonte de problemas será indicada ...

**Exemplo 3.2.2** Encontrar o substituto discreto para o compensador analógico  $C(s) = 1/(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)$ . Fatorando o denominador temos

$$C(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \quad \text{donde} \quad C_d(z) = \frac{K_d}{(z - e^{-T})^3}$$



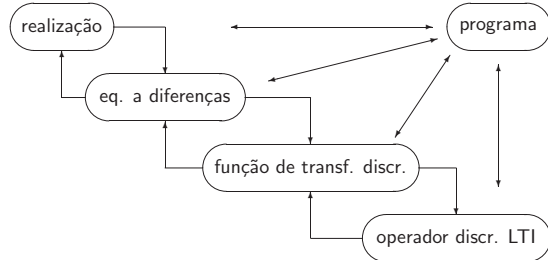
Suponhamos que cada período discreto corresponde a 1 dia, e que existe alguém encarregado da variável  $\xi(k)$ . Esta pessoa cuidadosamente armazena valores passados de  $\xi$ . Como existem apenas 3 caixas, pode-se armazenar apenas 3 valores passados de  $\xi$ : ontem, anteontem e trasanteontem.

Para calcular o valor de hoje de  $\xi$  esta pessoa usa o valor de hoje de  $u$ , metade do valor de ontem de  $\xi$  e metade do que  $\xi$  era anteontem. Esta pessoa também calcula o valor de  $y$ , que afinal de contas é mais importante do que o valor da variável auxiliar  $\xi$ : o valor de hoje de  $\xi$  mais o seu valor de ontem, e etc.

Em resumo: todos os dias esta pessoa segue todas as instruções do diagrama, e ao fazer isso a seqüência de saída  $y$  é gerada a partir de  $u$ . Qualquer pessoa pode fazer isto, pouca inteligência é requerida, e nenhuma criatividade, apenas a cega obediência a um conjunto de instruções. E eis aqui outra maneira de encarar uma realização: um conjunto de instruções, uma receita de bolo.

Seguir instruções como estas é decerto uma tarefa simples, mas extremamente tediosa para seres humanos, porque é algo repetitivo, monótono e pouca, ou mesmo nenhuma, criatividade está envolvida. Para felicidade nossa, há uma ferramenta que se adequa perfeitamente a este tipo de serviço ... qual seria ela? Armazenar valores, somar e multiplicar coisas, obedecer cegamente um conjunto de instrução previamente fixadas, execução sem erros destas coisas todas ... qual é a ferramenta?

Sim, computadores digitais! e uma realização nada mais é que a estrutura básica de um programa. Agora podemos completar a figura anterior:



Um sistema discreto sempre pode ser simulado por meio de vários programas, e isto ajuda a explicar o papel das realizações.

## 1.8 Exercícios

1. Encontrar expressões em forma fechada para as seguintes seqüências:

$$(a) f_1(k) = \begin{cases} 0 & \text{para } k < 0 \\ 1 & \text{para } 0 \leq k \leq 10 \\ 0 & \text{para } 10 < k \end{cases}$$

$$(b) f_2(k) = \begin{cases} 0 & \text{para } k < 6 \\ 6 & \text{para } 6 \leq k \leq 16 \\ 0 & \text{para } 16 < k \end{cases}$$

$$(c) f_3(k) = \begin{cases} 0 & \text{para } k < 0 \\ k & \text{para } 0 \leq k \leq 10 \\ 0 & \text{para } 10 < k \end{cases}$$

2. O sinal contínuo  $x(t)$  é um pulso de amplitude 9 e largura 5,2 aplicado a partir do instante  $t = 1,4$ . Amostrando esse sinal a cada  $T$  unidades de tempo podemos obter seqüências. Encontrar expressões em forma fechada para os seguintes casos:

$$(a) f_4(k) = x(kT) \text{ onde } T = 1$$

$$(b) f_5(k) = x(kT) \text{ onde } T = 2$$

$$(c) f_6(k) = x(kT) \text{ onde } T = 3$$

$$(d) f_7(k) = x(kT) \text{ onde } T = 0,01$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C_d(z) = \frac{K_d z^2}{(z-1)z^2} \approx \frac{K_d}{z-1}$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} C_d(z) = \frac{K_d(z^2 - 2z + 1)}{(z-1)(z^2 - 2z + 1)} \approx \frac{K_d}{z-1}$$

Nas aplicações práticas deve-se evitar períodos de amostragem extremamente grandes ou pequenos: os primeiros trazem problemas de perda de fidelidade, pois violam o teorema da amostragem, e os outros são difíceis de implementar.

A escolha do ganho discreto  $K_d$  deve ser baseada em hipóteses particulares de trabalho. Supondo por exemplo que a entrada  $e(t)$  do compensador analógico é um degrau  $1(t)$  teremos

$$U(s) = 2 \frac{s^2 + 3s + 2}{s(s^2 + 2s + 2)} \frac{1}{s} \implies u(t) = [1 + 2t - \sqrt{2}e^{-t} \sin(t + \pi/4)]1(t)$$

Em regime, quando a amplitude das oscilações amortecidas for desprezível, teremos  $u_r(t) = (1 + 2t)1(t)$ . Amostrando esta rampa temos a seqüência de saída “analógica”  $a(k)$ :

$$u_r(t) = (1 + 2t)1(t) \quad a(k) = u_r(kT) = (1 + 2Tk)1(k)$$

A tabela seguinte mostra estas seqüências para alguns valores de  $T$ :

$T$	$a(k)$
4.0073	$1 + 8.0146k$
1.0986	$1 + 2.1972k$
0.6932	$1 + 1.3863k$
0.0953	$1 + 0.1906k$

Acionando o substituto discreto com um degrau unitário temos

$$\tilde{U}(z) = C_d(z) \frac{z}{z-1} = K_d \frac{z^2 - (e^{-T} + e^{-2T})z + e^{-3T}}{(z-1)(z^2 - 2e^{-T} \cos Tz + e^{-2T})} \frac{z}{z-1}$$

donde tiramos

$$\frac{\tilde{U}(z)}{z} = K_d \frac{z^2 - (e^{-T} + e^{-2T})z + e^{-3T}}{(z-1)^2(z^2 - 2e^{-T} \cos Tz + e^{-2T})}$$

Expandindo em frações parciais vem

Embora esta solução plena e ideal fracasse na prática, a relação fundamental ainda pode se mostrar útil. Sendo  $s^*$  um pólo (ou zero) de  $C(s)$  diremos que  $z^* = e^{s^*T}$  será um pólo (ou zero) de  $C_d(z)$ . Assim, mapeando os pólos e zeros da solução analógica obtemos a solução discreta; ganhos  $K$  de  $C(s)$  são mapeados em ganhos  $K_d$  de  $C_d(z)$ .

$$C(s) = K \frac{(s - \zeta_1)(s - \zeta_2) \dots}{(s - \pi_1)(s - \pi_2) \dots} \longleftrightarrow C_d(z) = K_d \frac{(z - e^{\zeta_1 T})(z - e^{\zeta_2 T}) \dots}{(z - e^{\pi_1 T})(z - e^{\pi_2 T}) \dots}$$

A obtenção do ganho discreto  $K_d$  é um ponto delicado deste método; em algumas situações pode-se fazer  $K_d = K$ , mas em geral é necessária uma análise caso a caso.

**Exemplo 3.2.1** Encontrar o substituto discreto para o compensador analógico  $C(s) = (2s^2 + 6s + 4)/(s^3 + 2s^2 + 2s)$ . Fatorando numerador e denominador temos

$$C(s) = 2 \frac{s^2 + 3s + 2}{s(s^2 + 2s + 2)} = 2 \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+1+j)(s+1-j)}$$

O ganho 2 é mapeado em  $K_d$ , o zero  $-1$  em  $e^{-T}$ , etc, levando a

$$\begin{aligned} C_d(z) &= K_d \frac{(z - e^{-T})(z - e^{-2T})}{(z - e^{-0T})(z - e^{(-1-j)T})(z - e^{(-1+j)T})} \\ &= K_d \frac{z^2 - (e^{-T} + e^{-2T})z + e^{-3T}}{(z-1)(z^2 - 2e^{-T} \cos T z + e^{-2T})} \end{aligned}$$

O pólo analógico na origem é mapeado no pólo discreto  $+1$  independentemente do período de amostragem, mas os outros parâmetros dependem dele. Apresentamos abaixo um quadro com os resultados para alguns valores de  $T$ :

$T$	zero #1	zero #2	pólo	pólos complexos
8.00	$3.355 \times 10^{-4}$	$1.12 \times 10^{-7}$	1.0000	$(-0.49 \pm j3.32)10^{-4}$
4.00	$1.832 \times 10^{-2}$	$3.36 \times 10^{-4}$	1.0000	$(-1.20 \pm j1.40)10^{-2}$
2.00	0.1353	0.0183	1.0000	$-0.0563 \pm j0.1231$
1.00	0.3679	0.1353	1.0000	$0.1988 \pm j0.1108$
0.50	0.6065	0.3679	1.0000	$0.5323 \pm j0.2908$
0.10	0.9048	0.8187	1.0000	$0.9003 \pm j0.0903$
0.05	0.9512	0.9048	1.0000	$0.9500 \pm j0.0475$
0.01	0.9900	0.9802	1.0000	$0.9900 \pm j0.0099$

Fazendo  $T \rightarrow 0$  e  $T \rightarrow \infty$  perceberíamos que tanto períodos de amostragem muito elevados quanto muito baixos conduzem ao mesmo resultado:

3. O sinal contínuo  $x(t)$  é dado por  $x(t) = t1(t) - t1(t-10)$ . Amostrando esse sinal a cada  $T$  unidades de tempo podemos obter seqüências. Encontrar expressões em forma fechada para os seguintes casos:

- (a)  $f_8(k) = x(kT)$  onde  $T = 0,01$
- (b)  $f_9(k) = x(kT)$  onde  $T = 0,1$
- (c)  $f_{10}(k) = x(kT)$  onde  $T = 1$

4. Encontrar as transformadas em  $z$  para as  $f_i$  dos exercícios anteriores, todas as 10.

5. Amostras de um sinal contínuo  $f(t)$  são dadas abaixo. Determinar  $F(z)$ .

- (a)  $f(0) = 1$
- (b)  $f(T) = 4,7$
- (c)  $f(2T) = f(3T) = 0$
- (d)  $f(4T) = 0,75$
- (e)  $f(5T) = \sqrt{2}$
- (f)  $f(kT) = 0 \forall k \geq 5T$

6. Um pulso retangular de amplitude 9 e largura 5,2 começa a ser aplicado em  $t = 1,4$ . Determine a transformada  $z$  da seqüência resultante de uma amostragem desse sinal quando

- (a)  $f_s = 1Hz$
- (b)  $f_s = 0,5Hz$
- (c)  $f_s = 3Hz$

7. Encontrar as transformadas em  $z$  para  $f(k) = \sin(k\pi/3)$  e  $g(k) = \cos(k\pi/3)$ . As identidades seguintes podem ser úteis:

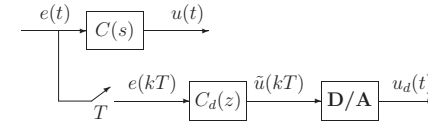
$$\sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} \quad \cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

8. O sinal contínuo  $x(t)$  é dado por  $\sin(k\pi/3)$ . Amostrando esse sinal a cada  $T$  unidades de tempo podemos obter seqüências. Encontrar expressões em forma fechada e as correspondentes transformadas em  $z$  para os seguintes casos:

- (a)  $f_{11}(k) = x(kT)$  onde  $T = 1/6$

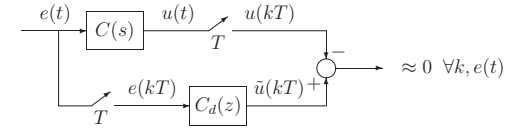
- (b)  $f_{12}(k) = x(kT)$  onde  $T = 1/12$   
(c)  $f_{13}(k) = x(kT)$  onde  $T = 1/24$   
(d)  $f_{14}(k) = x(kT)$  onde  $T = 0,1$   
(e)  $f_{15}(k) = x(kT)$  onde  $T = 10$   
(f)  $f_{16}(k) = x(kT)$  onde  $T = 100$   
(g)  $f_{17}(k) = x(kT)$  onde  $T \rightarrow \infty$   
(h)  $f_{17}(k) = x(kT)$  onde  $T \rightarrow 0$
9. Uma seqüência  $f(k)$  é periódica quando existe um inteiro positivo  $K$  tal que  $f(k) = f(k + K) \forall k \in \mathbb{Z}$ . O menor valor inteiro  $K$  que satisfaz esta identidade é chamado de período fundamental e recebe o símbolo  $K_0$ . Mostre que se uma seqüência  $\cos(\theta k)$  é periódica então  $\theta$  é um múltiplo racional de  $\pi$  ( $\theta = r\pi$  onde  $r$  é racional).
10. Mostre que se  $\theta$  é um múltiplo racional de  $\pi$  então a seqüência  $\cos(\theta k)$  é periódica.
11. Encontre um seno ou cosseno não periódico; plote o gráfico para vários valores de  $k$  e convença-se de que a seqüência não repete valores.
12. Quais seqüências do exercício 8 são periódicas? quais seus períodos fundamentais?
13. Encontrar as transformadas em  $z$  das seqüências  $\cos(\theta k)$  e  $\sin(\theta k)$ . Olhando para elas, como descobrir se os sinais são periódicos?
14. Plotar gráficos e encontrar as transformadas em  $z$  da seqüência  $\cos(\theta k)$  quando
- (a)  $\theta = \pi/4$   
(b)  $\theta = \pi/4 + \pi/3$   
(c)  $\theta = \pi/4 + 2\pi/3$   
(d)  $\theta = \pi/4 + 3\pi/3$   
(e)  $\theta = \pi/4 + 4\pi/3$   
(f)  $\theta = \pi/4 + 5\pi/3$   
(g)  $\theta = \pi/4 + 6\pi/3$   
(h)  $\theta = \pi/4 + 7\pi/3$
15. Determine as seqüências correspondentes a cada uma das transformadas  $z$  abaixo

um sistema discreto  $C_d(z)$ . Representando o amostrador como uma chave teremos



Desta maneira o problema fica restrito a escolher um sistema discreto  $C_d(z)$  e um período de amostragem  $T$  de modo a fazer com que  $u_d(t) \approx u(t) \forall t, e(t)$ . Ou então, usando uma formulação discreta, escolher  $C_d(z)$  e  $T$  de modo a fazer com que  $\tilde{u}(kT)$  seja uma boa aproximação para a amostragem de  $u(t)$ :

$$\text{Escolher } C_d(z) \text{ e } T \text{ tais que} \quad \tilde{u}(kT) - u(kT) \approx 0 \quad \forall k, e(t)$$



Algumas vezes o sinal  $u(kT) = a(k)$  será chamado de seqüência analógica, ao passo que  $\tilde{u}(kT) = d(k)$  será a seqüência discreta.

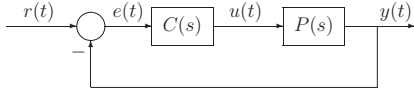
Mas este é um problema já analisado, trata-se de encontrar o substituto discreto de um sistema analógico, e até mesmo algumas soluções para ele já foram apresentadas. A partir de agora passamos a recordar estas soluções e a apresentar outras.

### 3.2.1 A solução ideal e o mapeamento de pólos e zeros

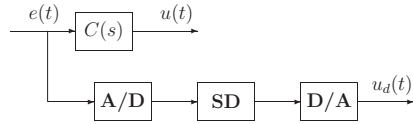
A solução teórica para este problema é dada pela relação fundamental entre os mundos contínuo e discreto, como já visto:  $z \leftrightarrow e^{sT}$  ou então  $s \leftrightarrow (1/T) \ln z$ . O compensador discreto seria então

$$C_d(z) = C(s)|_{s=\frac{1}{T} \ln z}$$

uma função não racional em  $z$ , e que apresenta problemas praticamente intransponíveis de implementação.



Isto significa que  $C(s)$  e  $P(s)$  são conhecidos, dados do problema, e que devemos analisar a implementação digital de  $C(s)$ . Devemos trabalhar na linha inferior do diagrama abaixo



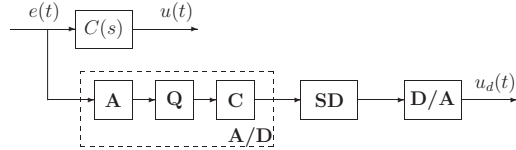
A situação ideal, que acarretaria uma implementação digital perfeita, ocorre quando os conversores e o sistema SD são escolhidos de tal modo que

$$u_d(t) = u(t) \quad \forall e(t)$$

Mas isto é impossível, pois o sinal  $u_d(t)$ , contínuo e quantizado, é a saída de um conversor D/A sendo portanto constante durante os intervalos de amostragem, como já vimos. A desejada igualdade poderia acontecer apenas para especialíssimas funções  $e(t)$ , o que não nos interessa. Devemos então reduzir o nível de exigência e estabelecer um novo objetivo:

$$u_d(t) \approx u(t) \quad \forall e(t)$$

Lembrando que um conversor A/D é composto por um amostrador, um quantizador e um codificador, o diagrama acima pode ser refeito



O quantizador e o codificador podem ser embutidos no sistema SD. Tere-mos então um sistema digital “agregado” cuja entrada é a saída do amostra-dor, que para todos os efeitos se comporta como um sinal discreto  $e(kT)$ , e cuja saída pode ser considerada como um sinal discreto e quantizado  $\tilde{u}(kT)$ . Fica claro que este sistema digital agregado pode ser então modelado como

- (a)  $X(z) = 1 + z^{-1} + 0,5z^{-7}$
- (b)  $X(z) = 5(1 - z^{-1})(1 + z^{-3})$
- (c)  $X(z) = 6(1 - 0,25z^{-1})^3$
- (d)  $X(z) = 10z^{-1}/(1 - 0,5z^{-1})$
- (e)  $X(z) = 10(1 - z^{-1})/[(1 - 0,5z^{-1})(1 - 0,25z^{-1})]$

16. Determine os cinco primeiros termos das seqüências cujas transforma-das são

- (a)  $X(z) = (1 - 4z^{-3})/(1 - 0,7z^{-3})$
- (b)  $X(z) = (z + z^{-3})/(z + z^{-1})$

17. Para a equação a diferenças abaixo, encontrar os 10 primeiros valores de  $y$  de maneira iterativa, e depois calcular uma expressão em forma fechada por meio de transformada em  $z$ .

$$\begin{cases} y(k+1) + y(k) = 3^{-k}; & k = 0, 1, 2, \dots \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

18. Para o sistema governado pela equação de diferenças abaixo, calcular  $y(k)$  para  $u(k) = (-2)^k$ ,  $k > 0$  e CI=0

$$y(k+2) + 4y(k+1) + 3y(k) = u(k+1) + u(k)$$

19. Usando Transformada  $z$ , resolver a equação abaixo

$$\begin{cases} y(k+3) + 6y(k+2) + 11y(k+1) + 6y(k) = u(k+1) + u(k) \\ y(0) = y(1) = y(2) = 0 \end{cases}$$

Considere: a)  $u(k) = \delta(k)$ , b)  $u(k) = 1(k)$ , c)  $u(k) = k1(k)$ , d)  $u(k) = 2^k 1(k)$ .

20. Usando Transformada  $z$ , resolver a equação abaixo

$$\begin{cases} y(k+1) + y(k) = u(k-2); & k = 0, 1, 2, \dots \\ y(0) = y(1) = y(2) = 1 \end{cases}$$

Considere os casos: a)  $u(k) = \delta(k)$ , b)  $u(k) = 1(k)$ , c)  $u(k) = k1(k)$ , d)  $u(k) = 2^k 1(k)$ .

21. Em um sistema discreto linear, causal, invariante no tempo e relaxado, a saída quando a entrada é um delta de Kronecker,  $u = \delta(k)$ , é  $g(k) = (-1)^k 1(k)$ :

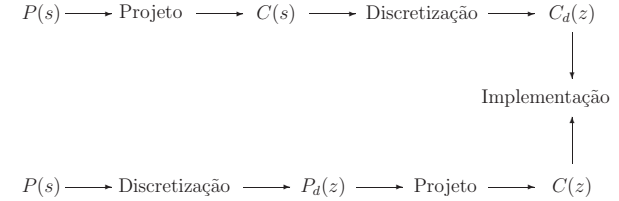
$$g(k) = \begin{cases} 0 & \text{para } k < 0 \\ (-1)^k & \text{para } k \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Por meio da somatória de convolução calcular sua saída quando  $u(k) = k1(k)$ .
- (b) Calcular a função de transferência discreta e usar a expressão  $Y(z) = G(z)U(z)$  para encontrar a saída em forma fechada.
- (c) Conferir o resultado no MATLAB
22. Determine a função de transferência discreta para cada um dos sistemas abaixo:
- (a)  $y(k) - y(k-1) = u(k)$
- (b)  $y(k) - 2y(k-1) + y(k-2) = u(k)$
- (c)  $y(k) - y(k-1) + 0,16y(k-2) = u(k) + 2u(k-1)$
- (d)  $y(k) + 0,6y(k-1) - 0,16y(k-2) = u(k) + 2u(k-1)$
- (e)  $y(k) - 0,707y(k-1) + 0,25y(k-2) = u(k)$
23. Encontrar equações dinâmicas para os sistemas descritos pelas equações a diferenças dos três últimos exercícios.
24. Considere o sistema descrito por

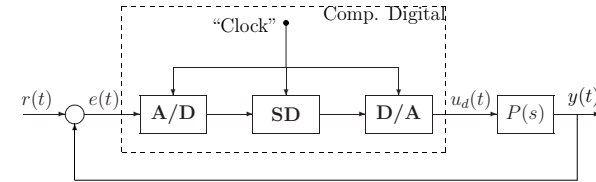
$$x(k+1) = Ax(k) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(k) \quad \text{com} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Encontrar  $x(12)$
- (b) Encontrar  $x(9)$
- (c) Encontrar a solução em forma fechada para a seqüência  $x(k)$  e comentar sobre ela.
25. Um SLIT discreto apresenta a resposta

$$y(k) = \left[ \frac{1}{3}(-1)^{k-2} + \frac{2}{3}2^{k-2} \right] 1(k-2)$$



Seja qual for o método de projeto, o sistema digital resultante será implementado de acordo com o esquema abaixo:



Os conversores A/D e D/A são razoavelmente padronizados, não há muita escolha a respeito deles, a menos, é claro, do período de amostragem  $T$ , uma escolha importante que influencia todo o projeto.

Para o sistema digital SD podemos ter duas opções: um sistema específico, construído apenas para a missão de controlar a planta em estudo ou então um computador digital, que pode se amoldar a qualquer problema. O custo sempre menor e a capacidade sempre maior tem tornado os computadores digitais cada vez mais acessíveis e poderosos, e isto é excelente, pois a flexibilidade trazida por eles é enorme: além da capacidade de implementar os mais variados compensadores, eles ainda guardam “reservas” que permitiriam seu uso em outras tarefas, como por exemplo a exibição de curvas e gráficos, etc.

Quer se use um SD específico ou um computador digital, pouco teremos a fazer na parte de hardware, ela pode ser considerada uma parte fixa e padronizada. O trabalho todo recairia na parte de software, uma etapa importante do projeto.

### 3.2 Projeto Analógico

A planta  $P(s)$  é dada, e o compensador  $C(s)$  foi projetado por um método analógico qualquer dos muitos existentes.

ou então um computador digital desempenhando o papel do controlador  $\mathcal{C}$ . As vantagens desta filosofia podem ser agrupadas em quatro categorias:

- Robustez
- Precisão
- Flexibilidade
- Custo

Uma questão do tipo Controle Analógico  $\times$  Controle Digital raramente tem uma solução clara e cristalina, que indique uma supremacia incontestável de um dos campos. A análise dos tópicos acima pode levar o leitor a optar pelo caminho digital mas é bom dizer que estes tópicos foram escolhidos exatamente porque falam das vantagens deste campo. Poderíamos também escolher tópicos que favorecessem o campo analógico.

### 3.1 Projetos Digitais de Controladores

Há no mercado duas filosofias básicas de projeto de controladores digitais, ambas envolvendo a discretização de um sistema analógico, mas em instantes diferentes do procedimento.

No primeiro tipo, que pode ser chamado de **Projeto Analógico**, um controlador analógico  $C(s)$  é projetado usando qualquer elemento do vasto arsenal contínuo, como por exemplo: resposta em frequência, lugar das raízes, realimentação de estados, métodos polinomiais, ou qualquer um dos inúmeros outros. De posse desta solução basta discretizar  $C(s)$  para obter o compensador discreto  $C_d(z)$  que será implementado, o que quer dizer: inserido na malha analógica original, com os devidos conversores A/D e D/A

No método alternativo, que pode ser chamado de **Projeto Discreto**, o primeiro passo consiste em discretizar a planta  $P(s)$  e obter um equivalente discreto  $P_d(z)$ . Estamos agora no mundo discreto e usaremos suas ferramentas específicas de projeto de compensadores para obter a solução  $C(z)$ . Que ferramentas são estas? Calma, pessoal, mais tarde ... Resta apenas implementar a solução  $C(z)$ , ou seja, revesti-la de conversores A/D e D/A e enxertá-la no mundo contínuo.

quando a condição inicial é nula e a entrada é

$$u(k) = \left[ \frac{1}{3}(-1)^k + \frac{2}{3}2^k \right] 1(k)$$

onde  $1(k)$  denota um degrau unitário discreto.

- Determine a função de transferência  $G(z)$  para este sistema.
- Forneça um diagrama de blocos para esta  $G(z)$ , usando apenas atrasadores unitários, somadores e blocos com ganhos constantes.
- Encontre uma representação  $\langle A, B, C, D \rangle$  por variáveis de estado que tenha a mesma  $G(z)$  calculada no item (a).
- Para a representação encontrada em (c), se o impulso unitário  $\delta(k)$  ocasiona a saída  $y(k) = \delta(k-2) + 7\delta(k-1) + 3\delta(k)$  para algum estado inicial  $x(0) \neq 0$ , então encontre este estado inicial.

26. Dado o sistema discreto  $x(k+1) = Ax(k)$  com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -f_1 & 2-f_2 & 1-f_3 \end{bmatrix}$$

calcular os  $f_i$  de modo que  $x(3) = 0$  qualquer que seja  $x(0)$ .

27. Determine os valores de  $K$  que garantem estabilidade para os sistemas:

- $y(k) - Ky(k-1) + K^2y(k-2) = u(k)$
- $y(k) - 2Ky(k-1) + K^2y(k-2) = u(k)$
- $y(k) - K^2y(k-2) = u(k)$

28. Encontrar realizações de pelo menos três tipos diferentes para a função de transferência do exercício 21.

29. Encontrar realizações de pelo menos três tipos diferentes para as seguintes funções de transferência

- $z^2/(z^2 - 2z + 1)$
- $(z^2 + 2z)/(z^2 + z + 0,16)$
- $(1 - z^{-1})/(z^2 + 3z + 2)$
- $(z + 1)/(1 - 2z^{-1} + z^{-2})$

30. Determine a resposta em frequência para os sistemas definidos por

- (a)  $y(k) = u(k) - u(k-4)$   
 (b)  $y(k) = 2u(k) + 4u(k-1) + 2u(k-2)$   
 (c)  $y(k) + 0,25y(k-1) = u(k-1)$

31. As equações abaixo representam filtros digitais de dois e três termos, respectivamente

- (a)  $y(kT) = (1/2)[u(kT) + u(kT - T)]$   
 (b)  $y(kT) = (1/3)[u(kT) + u(kT - T) + u(kT - 2T)]$

Determine as funções de transferência e plote os gráficos da resposta em frequência em função de  $r = f/f_s$  no intervalo  $0 \leq f \leq 0,5$ . Em que sentido esses filtros se comportam como integradores?

32. Se no dia primeiro de todos os meses você deposita religiosamente  $M$  reais em uma caderneta de poupança a equação de diferenças abaixo representa todas as alquimias financeiras que acontecem com o seu dinheirinho:

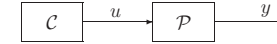
$$\begin{cases} x(k+1) - (1+p)x(k) = 3M1(k) \\ x(0) = M \end{cases}$$

Supondo que correção monetária e dividendos permaneçam os mesmos no futuro podemos considerar  $p = 0,06$  (6% por trimestre civil). Para  $M = 180$ :

- (a) encontre a expressão para  $x(k)$   
 (b) calcule  $x(20)$  o seu saldo após 5 anos

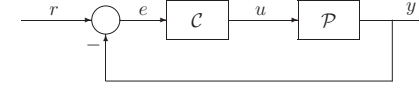
o problema de Controle passa a ser: dada uma planta  $\mathcal{P}$  e um certo comportamento desejado, encontrar uma entrada  $u$  capaz de fazer com que ele se concretize.

Quase sempre a solução  $u$  do problema de Controle é fisicamente obtida como a saída de um sistema chamado **Controlador** e designado por  $\mathcal{C}$ :



O problema de Controle é reformulado: dada uma planta  $\mathcal{P}$  e um certo comportamento desejado, projetar um sistema  $\mathcal{C}$  cuja saída  $u$ , quando usada como entrada da planta, é capaz de impor o comportamento.

Para resumir uma história ilustrativa, importante e interessante, que é normalmente bem dissecada em cursos e textos básicos de Controle, diremos que alguns dos controladores mais bem sucedidos apresentam a estrutura abaixo:



Temos um controlador em **malha fechada** caracterizado pela realimentação negativa de saída. As vantagens desta configuração, bem como explicações mais detalhadas sobre seu funcionamento, e de porque ele é superior, devem ser procuradas alhures.

Na esmagadora maioria das situações de interesse a planta que se quer controlar é um sistema contínuo, e em um número apreciável de vezes é ainda linear e invariante no tempo. Para nós, a partir deste ponto, a atenção se restringirá então a plantas lineares, invariantes no tempo e, a menos de menção explícita, com apenas uma variável de entrada e de saída. Nestas condições a planta é caracterizada por uma função de transferência racional e própria  $P(s)$ .

A praxe histórica tradicional indica, para plantas deste tipo, controladores também lineares e invariantes no tempo, que seriam então caracterizados por funções de transferência  $C(s)$ . Uma possível exceção a esta tendência aparece no chamado Controle Não Linear, quando tentamos controladores que são, quem diria, não lineares. Outra possibilidade, e à qual dedicaremos todos os futuros esforços, é o uso de Sistema Digitais para implementar os controladores.

Desta maneira, no Controle Digital temos um sistema digital específico



## Capítulo 3

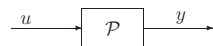
### Controle e Controle Digital

A idéia básica de Controle é muito simples: dado um certo sistema desejamos impor a ele a nossa vontade. Desejamos, por exemplo, que a sua saída ou o seu estado tenham este ou aquele comportamento, esta ou aquela propriedade, etc.

Nas situações típicas de Engenharia os comportamentos que desejamos impor aos sistemas são, em geral, simples e bem justificados: desejamos que a saída tenda para zero com uma rapidez assim ou assado, ou então, desejamos que a saída se aproxime o máximo possível de uma dada função bem conhecida, ou então, desejamos que a saída oscile com amplitude e frequência dadas; e assim por diante.

Os seres humanos tem uma atração inata e instintiva pela idéia mestra de Controle. Todos nós, com efeito, sempre desejamos impor as nossas vontades aos sistemas todos que nos rodeiam, sejam eles sistemas do mundo físico ou sistemas na acepção mais geral do termo, o que pode ser muito vasto e englobar praticamente tudo. Pode não ser uma postura muito aceitável do ponto de vista ético, mas devemos admitir que sempre, ou quase sempre, desejamos impor nossos desejos e pontos de vista aos ambientes, situações e pessoas que nos rodeiam.

As aplicações de interesse deste texto são as de Engenharia, e problemas ético-filosóficos como os sugeridos acima serão ignorados. O sistema que se quer controlar recebe o nome de **Planta**, muitas vezes designada por  $\mathcal{P}$ , suas entradas e saídas receberão os símbolos  $u$  e  $y$ , respectivamente, e o tradicional diagrama abaixo ilustra as coisas



Como se supõe que a planta é um dado do problema, algo fixo e imutável,

## Capítulo 2

### Conexões com o mundo contínuo

#### 2.1 Desperdício e economia

Os sinais existem para transmitir informações, isto é claro. Em algumas situações, uma certa quantidade de informação pode ser transmitida por vários sinais diferentes, e é razoável supor que em alguns destes sinais a transmissão é feita com algum desperdício, seja em tempo ou em energia. Seria então útil identificar e usar os sinais mais econômicos.

A partir de agora passaremos a analisar os sinais com ênfase nesses novos aspectos de desperdício e economia. Começemos com um exemplo.

Consideremos um problema muito comum, que praticamente todos nós temos que resolver todos os dias, e várias vezes em cada dia. Apreciaremos algumas das possíveis soluções deste problema que é ... andar.

Sim, andar, o ato de mover pernas e pés com a finalidade de locomover nossos corpos de determinados lugares a outros pontos. Muito mais do que nos aspectos mecânicos e musculares, estaremos interessados em como nossos cérebros se envolvem no processo. Em primeiro lugar dividiremos o problema em várias possíveis situações.

- **Praça ampla, clara e plana, com poucas pessoas.**

O que provavelmente ocorre é o seguinte: por uns 2 ou 3 segundos o cérebro da pessoa se focaliza no problema de andar: ele estabelece um rumo retilíneo e depois comanda o corpo para executar a tarefa. Nesta segunda parte, o cérebro toma todas as decisões fisio-mecânicas necessárias sem a pessoa perceber.

Logo depois o cérebro se ocupa com outras coisas porque, francamente, esta particular caminhada é uma tarefa muito fácil. A atenção pode

ser focalizada em coisas como conversar com um amigo, olhar as outras (poucas) pessoas que passam, apreciar a paisagem, pensar em como é belo e interessante o estudo de Sistemas e Sinais, e em como é prazeroso trabalhar nele, etc.

Alguns 20 ou 30 segundos depois o cérebro — que estamos supondo ser um cérebro sábio — temporariamente interrompe todos estes processos mentais e por 2 ou 3 segundos devota mais uma vez a sua atenção plena ao problema de andar: este é o rumo correto? algum perigo à frente? o plano original pode ser mantido ou deve ser mudado?

Após esta rápida avaliação dos parâmetros novas decisões (que podem ser iguais às antigas) são tomadas e mais um longo período de outras atividades pode começar. E isto se sucede, até que o objetivo seja alcançado.

Podemos dizer que a distribuição das ocupações cerebrais ao longo do tempo é representada pela figura



- **Praça ampla, clara e plana, com muitas pessoas.**

Se o mesmo esquema descrito anteriormente for usado haverá um perigo grande de haver muitos choques e encontrões com as (muitas) pessoas indo e vindo. A solução que cérebros sábios normalmente aplicam é a seguinte: o problema básico continua a ser resolvido nos mesmos 2 ou 3 segundos, ele não mudou, mas o período de devaneios será reduzido para 10 ou 20 segundos.

- **Trilha estreita nas montanhas, noite escura.**

Sem comentários, certo? os mesmos 2 ou 3 segundos de atenção plena ao problema e não mais do que outros 2 ou 3 segundos para outras coisas. E olhem só, se a trilha for muito estreita, bem no alto e realmente perigosa, a atenção do cérebro para o problema de andar será requisitada de modo **contínuo**.

Vemos que em algumas situações é necessária uma atenção contínua, ou muito freqüente, ao problema, ao passo que em outras instâncias uma tal dedicação em “tempo integral” ou “quase integral” seria um desperdício e poderíamos compartilhar o tempo com outras tarefas.

como saída pelo computador é  $X = x_0x_1x_2x_3x_4$  o conversor DA gerará uma tensão que se manterá constante no intervalo:

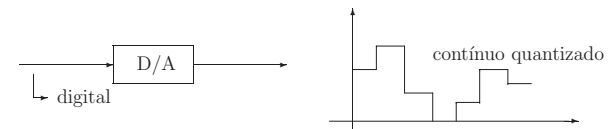
$$X = 10101 : e = -(0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4})(-10) = 3.125$$

$$X = 11011 : e = -(1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4})(-10) = 6.875$$

$$X = 11111 : e = -(1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4})(-10) = 9.375$$

$$X = 01111 : e = -(1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4})(10) = -9.375$$

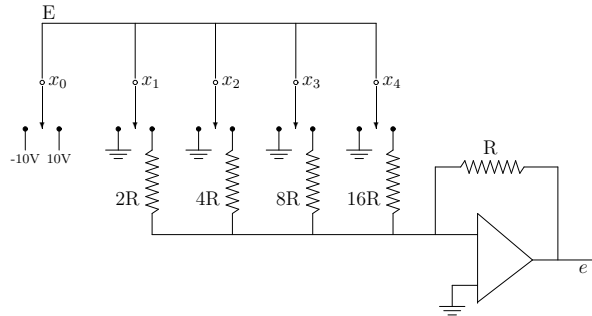
O sinal de saída do conversor DA é portanto contínuo e quantizado e pode ser aplicado diretamente a sistemas contínuos.



Conversores A/D e D/A encontram-se normalmente integrados nas chamadas **placas de aquisição de dados** ou **placas de conversão AD – DA**.

mos uma sequência de bytes que variam ao longo do tempo. O gráfico deste sinal em função do tempo, supondo que fosse possível plotá-lo, nada teria de parecido ou semelhante ao gráfico de  $p(t)$ . Ou seja, um sinal contínuo é certamente semelhante, análogo a um sinal “real” por ele representado, o que não ocorre com sinais digitais. Assim, sinais contínuos são muitas vezes chamados de **sinais analógicos**. Ou pelo menos deveriam ser, se a tradução do termo inglês *analog* tivesse sido bem feita originalmente. Mas em Português a denominação **sinais analógicos** é dominante. Em resumo, os sinais contínuos são muitas vezes chamados de **analógicos**, o que explica letra A.

Um **Conversor D/A** efetuará a passagem inversa, de um sinal digital para outro contínuo. O circuito esquematizado abaixo seria capaz de uma tarefa como essa. Ele é baseado em um amplificador operacional, cujo funcionamento supõe-se conhecido pelos leitores. As chaves mostradas são comandadas por variáveis binárias (bits)  $x_i$  da seguinte maneira: quando  $x_i = 0$  a chave se conecta ao terminal da esquerda, e quando  $x_i = 1$  ao da direita.



A tensão de saída  $e(t)$  será dada por

$$e(t) = - \left( x_1 \frac{R}{2R} + x_2 \frac{R}{4R} + x_3 \frac{R}{8R} + x_4 \frac{R}{16R} \right) E$$

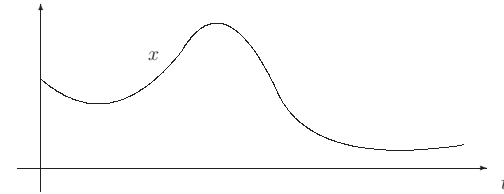
$$e(t) = - \left( x_1 2^{-1} + x_2 2^{-2} + x_3 2^{-3} + x_4 2^{-4} \right) E$$

A tensão  $E$  é obtida da seguinte maneira: se  $x_0 = 0$  então  $E = 10V$ , se  $x_0 = 1$  então  $E = -10V$ . Por esta razão a variável  $x_0$  é chamada de bit do sinal. Se, durante um determinado período de amostragem a palavra enviada

A próxima meta é identificar as situações nas quais é possível dividir o tempo em períodos de atenção focada no problema e períodos de atenção focada em outras coisas.

## 2.2 Amostragem Pulsada e Geral

Para estudar a questão abordada acima de uma maneira geral e abstrata, consideremos um sinal contínuo  $x(t)$



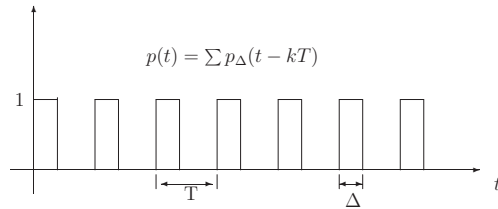
Há situações nas quais um sinal contínuo como este é um desperdício? Se sim, é possível encontrar substitutos mais econômicos? Para começar a tratar destas questões apresentaremos o conceito de amostragem pulsada. Um pulso de largura  $\Delta$  e amplitude unitária, aplicado a partir da origem é definido por

$$p_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1 & \text{para } 0 \leq t \leq \Delta \\ 0 & \text{para } t > \Delta \end{cases}$$

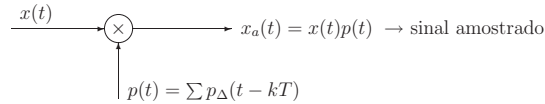
Um destes pulsos aplicado a partir do instante  $T$  e não da origem, seria designado por  $p_{\Delta}(t - T)$  e um trem destes pulsos com período  $T$  seria dado por

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{\Delta}(t - kT) = \dots p_{\Delta}(t) + p_{\Delta}(t - T) + p_{\Delta}(t - 2T) \dots$$

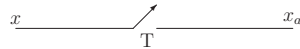
cujo gráfico é



A **amostragem pulsada** de um sinal contínuo  $x(t)$  é o processo de sua multiplicação por um trem de pulsos como o acima:



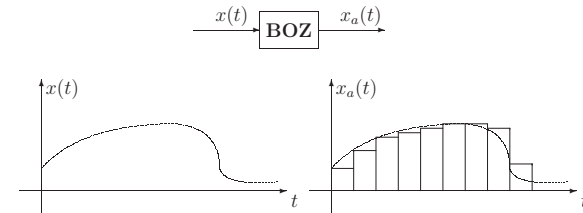
Uma maneira alternativa de simbolizar a amostragem pulsada é pelo uso da **Chave Amostradora Ideal** ou simplesmente **Amostrador Ideal**. Trata-se de um dispositivo que pode transmitir integralmente um sinal contínuo (dizemos que está fechada, ou conduzindo, ou transmitindo) ou então bloqueá-lo (dizemos que está aberta). O símbolo abaixo designa um amostrador ideal:



Para substituir a multiplicação por um trem de pulsos como acima, os amostradores funcionam de maneira periódica: permanecem fechados durante  $\Delta$  unidades de tempo, apresentando como saída o sinal contínuo de entrada:  $x_a = x$ ; depois permanecem abertos durante  $T - \Delta$  unidades de tempo, apresentando saída nula:  $x_a = 0$ . E estes ciclos, com período  $T$ , vão se sucedendo.

O resultado da amostragem pulsada de um sinal contínuo  $x(t)$ , a saída  $x_a(t)$ , será também um sinal contínuo. Para o sinal ilustrado acima teríamos

(ABOZ) admite como entrada um sinal contínuo  $x(t)$ , e sua saída permanece constante durante intervalos de tempo de largura  $T$ . Mais especificamente, durante o intervalo entre  $kT$  e  $(k+1)T$ , para qualquer valor inteiro de  $k$ , a saída do BOZ vale  $x(kT)$ , o valor da entrada no início do intervalo.

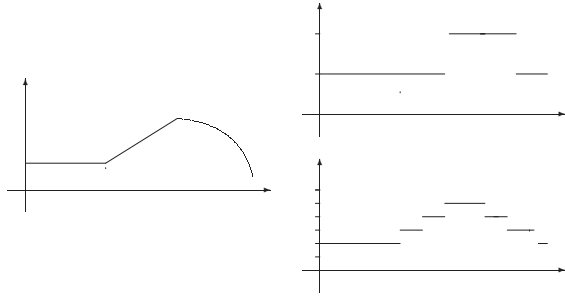


É interessante notar que os bloqueadores de ordem zero **não** produzem amostragens instantâneas ou impulsivas. Suas saídas, pelo contrário, são sinais contínuos. Mas estes sinais  $x_a(t)$  são sinais contínuos muito especiais, eles são constantes durante todos os intervalos de amostragem, e podem ser muito bem representados pelas seqüências  $x(kT)$ .

Por que as letras A e D no nome Conversores A/D? O D é explicado facilmente, vem de digital, claro, a qualidade dos sinais de saída. Que dizer do A? Vamos lá.

Muitas vezes sinais contínuos são usados para ilustrar a variação de grandezas físicas ao longo do tempo. Vamos supor, por exemplo, que a posição de um dado corpo pode ser medida pela sua abscissa  $p$  com relação a um dado referencial; se conhecermos o valor de  $p$  para todos os instantes  $t$  de interesse, ou seja, se conhecermos a função  $p(t)$ , estaremos satisfeitos. O conhecimento desta função pode ser obtido pela aplicação das leis da Física, mais especificamente as leis da Mecânica. Podemos também medir a posição do corpo por meio de um instrumento qualquer, há vários instrumentos de vários tipos capazes de tal tarefa. Usando por exemplo um transdutor eletromecânico teríamos como saída uma tensão elétrica  $x$  que varia com o tempo, fornecendo um sinal  $x(t)$ . Se o transdutor estiver bem calibrado e fornecendo resultados confiáveis o gráfico do sinal de medida  $x(t)$  será idêntico ao gráfico do sinal “real”  $p(t)$ . Este termo “idêntico” deve ser entendido da seguinte maneira: as escalas podem ser diferentes, e a natureza física das grandezas envolvidas também, mas o formato das curvas deve ser o mesmo.

Se, por outro lado, medirmos a posição do corpo usando um instrumento digital, e analisarmos o sinal digital que representa a grandeza  $p$  encontrare-



Nas aplicações práticas o número de níveis de quantização é sempre uma potência de 2:

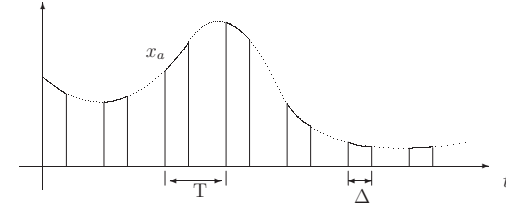
2 ou 4 ou 8 ou 16 ou ...  $2^n$

As razões para isto são óbvias: o comprimento das palavras dos computadores. O número de bits usado em cada palavra (byte) é, via de regra, uma potência de 2. Assim, em um computador com palavra de 4 bits teríamos os seguintes níveis de quantização:

$q_0 = 0000$   
 $q_1 = 0001$   
 $q_2 = 0010$   
 $q_3 = 0011$   
 $q_4 = 0100$   
 $q_5 = 0101$   
 $q_6 = 0110$   
 $q_7 = 0111$

E um sinal digital é um sinal discreto que assume, em cada instante discreto  $k$  um dos valores  $q_i$  acima.

Outro estágio importante dos conversores A/D é o amostrador. O dispositivo físico normalmente utilizado para amostrar o sinal contínuo é chamado de **Amostrador-Bloquador de Ordem Zero** ou ABOZ. A terminologia em língua inglesa é **Sample and Hold**; Algumas vezes, com um certo abuso, este amostrador-bloqueador é chamado apenas de **Bloquador de Ordem Zero** — BOZ — ou, em inglês, **Zero Order Holder** ou ZOH. Mais adiante notaremos a diferença entre um BOZ e um ABOZ. Um sistema destes



A pergunta principal a se fazer é: o sinal amostrado  $x_a$  carrega em si alguma informação a respeito do sinal original  $x$ ? Se sim, esta informação é suficiente para permitir uma recuperação completa de  $x$  a partir de  $x_a$ ?

Para atacar estas questões trabalharemos em uma situação mais geral, definindo **Amostragem Generalizada** ou simplesmente **Amostragem** de um sinal  $x(t)$  como sendo a sua multiplicação por um sinal contínuo e periódico qualquer,  $p(t)$ , com período  $T$ . A amostragem pulsada vista anteriormente pode ser considerada como um caso particular deste ambiente geral. É interessante notar que a modulação de amplitude para sinais contínuos, muito usada na transmissão por rádio, também é um caso particular de amostragem.

O sinal  $p(t)$ , periódico, pode ser expresso por sua série de Fourier:

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_a t}$$

onde  $f_a = 1/T$  é a frequência de amostragem e o coeficiente do  $k$ -ésimo harmônico é dado por

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t) e^{-j2\pi k f_a t} dt$$

O sinal amostrado pode então ser expresso como

$$x_a(t) = x(t)p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k x(t) e^{j2\pi k f_a t}$$

e sua transformada de Fourier será

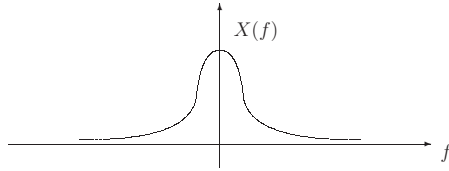
$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x_a(t)\} = X_a(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k x(t) e^{j2\pi k f_a t} \right) e^{-j2\pi f t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi k f_a t} e^{-j2\pi f t} dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f - k f_a)t} dt
\end{aligned}$$

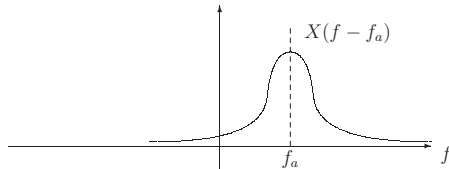
Sendo  $X(f)$  a transformada de Fourier de  $x(t)$  percebemos pelo desenvolvimento acima que

$$\begin{aligned}
X_a(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k X(f - k f_a) \\
&= \dots C_{-1} X(f + f_a) + C_0 X(f) + C_1 X(f - f_a) + C_2 X(f - 2f_a) \dots
\end{aligned}$$

O espectro do sinal amostrado consiste então da soma de cópias deslocadas (na frequência) e atenuadas do espectro do sinal original. Para ilustrar, seja um sinal  $x(t)$  com espectro de amplitude  $X(f)$  dado por



O gráfico de  $X(f - f_a)$  pode ser obtido deslocando esta curva de  $f_a$  unidades para a direita:

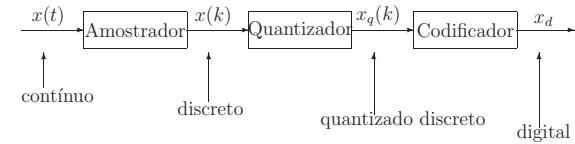


Já se pode ter uma idéia, pelo menos para este exemplo, de como seria o espectro do sinal amostrado: a soma de todas as parcelas esboçadas abaixo

nível	valor	código
0	0.100 V	000
1	0.300 V	001
2	0.500 V	010
⋮	⋮	⋮

## 2.7 Conversão de sinais

Para digitalizar um sinal contínuo, ou, o que vem a dar no mesmo, para prepará-lo para o computador, uma seqüência de operações devem ser feitas: a amostragem (para discretizá-lo), a quantização (para quantizá-lo) e a codificação. Os digitalizadores são chamados de **Conversores A/D** e seu esquema básico é



Na conversão A/D o estágio de amostragem pode ser tornado isento de erros, desde que o sinal contínuo seja de banda limitada e a frequência de amostragem seja adequada. O estágio de codificação tampouco contamina o sinal, já que consiste em uma simples atribuição de valores binários aos níveis de quantização. Quantização, eis o estágio onde são introduzidos os erros inevitáveis do processo de conversão.

Deste modo, para analisar os erros da digitalização a primeira pergunta a encerrar é a seguinte: de quantos níveis de quantização precisamos? É muito fácil perceber que, quanto maior o número destes níveis (ou, equivalentemente, quanto menor a largura dos intervalos  $h$ ) menores os erros introduzidos pelo processo. Ou seja, quanto mais níveis houver, melhor. O exemplo abaixo, onde quantizamos um sinal contínuo com 3 ou com 7 níveis, permite a visualização deste fato:

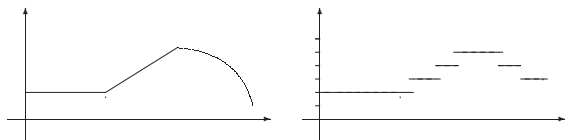
onde na coluna da esquerda aparecem os intervalos de tensões, em volts, e nas colunas da direita os níveis de quantização e as leituras do mostrador:

intervalo	nível	leitura
$0.00 \leq x < 0.20$	0	0.10
$0.20 \leq x < 0.40$	1	0.30
$0.40 \leq x < 0.60$	2	0.50
$0.60 \leq x < 0.80$	3	0.70
$\vdots$		$\vdots$

Como a largura de cada faixa de quantização é de 0.20V e como associamos a cada um destes intervalos o seu valor médio percebemos que o erro máximo em cada leitura será de 0.10V. Se a cada faixa associássemos um valor de leitura igual a um dos extremos (superior ou inferior) do intervalo, qual seria o erro máximo possível em cada leitura?

Deve estar claro que para diminuir o erro máximo admissível em cada leitura devemos usar intervalos de quantização estreitos:  $h$  é pequeno. Mas para isto deveremos ser capazes de lidar com um número elevado de níveis de quantização:  $n$  é alto. Quando o alcance do sinal que se quer medir for alto isto pode não ser muito simples, ou barato.

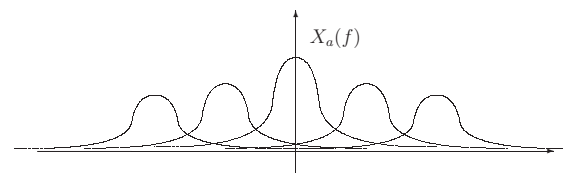
Supondo que a tensão que se quer medir é representada pelo sinal contínuo abaixo, o instrumento deve ser considerado como um quantizador, e o resultado será



Muitas pessoas acham que sinais discretos são importantes porque são os únicos sinais aceitos por computadores digitais. Isto está errado!

Computadores digitais não trabalham com sinais discretos, nem muito menos com sinais contínuos. Computadores digitais aceitam, entendem e trabalham com **sinais digitais**.

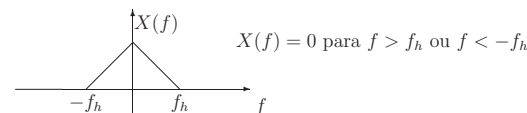
Um sinal digital é, por definição, um sinal ao mesmo tempo discreto, quantizado e codificado. Quando associamos a cada um dos níveis de quantização um número binário temos um sinal **codificado**. Pronto, estamos chegando, estes sinais codificados podem ser entendidos por computadores digitais.



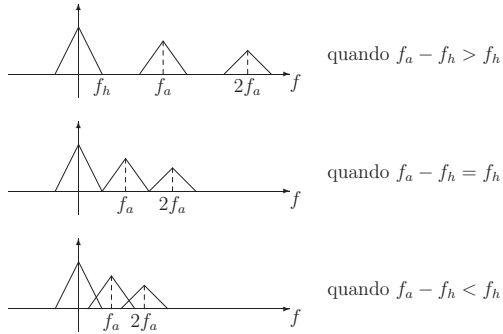
A tarefa parece ingrata e a possibilidade de recuperar informações sobre  $x(t)$  a partir de  $x_a(t)$  ou, equivalentemente, de  $X(f)$  a partir de  $X_a(f)$ , também. Para o caso geral a situação é essa, mas para uma determinada classe de sinais as coisas mudam. Diremos que um sinal contínuo é **de banda limitada** quando a sua transformada de Fourier é nula acima de certas frequências, ou seja

$$X(f) = 0 \quad \text{para} \quad |f| > f_h$$

Isto significa que o espectro de amplitude de um destes sinais teria o seguinte formato



Como em tantas outras situações, estes sinais de banda limitada são abstrações matemáticas, entidades estudadas porque apresentam propriedades atraentes e desejáveis. Mas vários sinais reais e concretos, com grande importância prática, podem ser muito bem aproximados por sinais de banda limitada, o que é uma sorte, senão vejamos. Seja  $x(t)$  um sinal de banda limitada que é amostrado com uma frequência de amostragem  $f_a$ ; vejamos o que acontece ao espectro de  $x_a(t)$  para três casos distintos.



É bom prestar atenção nestes gráficos, pois eles proporcionam uma demonstração, simplificada, do famoso **Teorema da Amostragem**

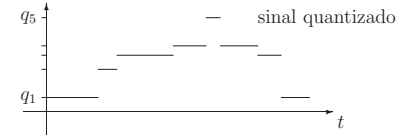
**Teorema 2.2.1** *Um sinal  $x(t)$  de banda limitada, com faixa de passagem  $2f_h$ , pode ser completamente recuperado a partir de uma amostragem  $x_a(t)$  efetuada com um frequência constante e uniforme  $f_a$  desde que*

$$f_a > 2f_h$$

Eis aí. Um dos resultados mais importantes do pedaço. A mensagem final do teorema é, no fundo, aquilo que nossas intuições já pressentiam: quanto maior a taxa de amostragem, mais seguro o procedimento todo. No limite, quando  $f_a$  cresce muito, temos períodos de amostragem muito pequenos, e o sinal  $x_a(t)$  é praticamente idêntico ao sinal original  $x(t)$ , como se pode ver facilmente na amostragem pulsada. Isto também concorda com nossas intuições.

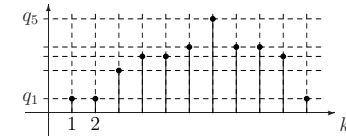
O mais interessante é deixar a taxa de amostragem cair. Até onde se pode ir sem perigo? Resposta: até  $2f_h$ , abaixo disto os problemas aparecem. Este valor  $2f_h$ , aliás, recebe o nome de **taxa ou frequência de Nyquist**.

Quando um sinal de banda limitada é amostrado com uma frequência adequada, um simples filtro passa-baixas permite a sua recuperação a partir da amostra. Os efeitos de amostragens com frequências baixas, ou então de amostragens de sinais de banda não limitada serão vistos oportunamente.



Pode-se dizer que o eixo vertical é “discretizado”. Na figura acima podemos identificar 6 valores ou níveis de quantização, desigualmente espaçados, e sendo o primeiros deles a origem:  $q_0 = 0, q_1, \dots, q_5$ . É importante perceber que um sinal quantizado como este é um sinal contínuo constante por partes.

Para um sinal discreto e quantizado o eixo horizontal também seria discretizado e apenas pontos da grade resultante podem pertencer ao gráfico.



Nas aplicações práticas os níveis de quantização são igualmente espaçados:

$$q_0, \quad q_1 = q_0 + h, \quad q_2 = q_0 + 2h, \quad \dots \quad q_{n-1} = q_0 + (n-1)h$$

onde  $h$  é o intervalo de quantização. A distância  $A_q = q_{n-1} - q_0$  entre os níveis superior e inferior de quantização é chamada de **alcance da quantização**. É imediato notar que  $A_q = (n-1)h$ . Muitas vezes se deseja saber quantos níveis de quantização são necessários para cobrir um dado alcance  $A_q$  com um intervalo  $h$ ; a aritmética envolvida é trivial:  $n = 1 + A_q/h$ .

Dizemos que um sinal contínuo e quantizado  $x_q(t)$  é uma **aproximação quantizada** de um sinal contínuo  $x(t)$  quando o sinal de erro  $e(t) = x(t) - x_q(t)$  é adequadamente “pequeno”. Existem vários critérios matemáticos para indicar a “pequenez” de sinais, mas neste ponto apelaremos para a intuição dos leitores: um sinal  $e(t)$  será “pequeno” quando estiver sempre próximo de zero, ou então, quando sua integral ao longo do tempo for um número real pequeno.

Chamaremos de **quantizador** um sistema contínuo que fornece como saída uma aproximação quantizada para a entrada. Muitos instrumentos modernos podem ser encarados como quantizadores. Imaginemos, por exemplo, um voltímetro cujo funcionamento seja descrito pela tabela seguinte,



No caso geral, qual seria um “bom” substituto discreto para uma dada  $H(s)$ ? Gostaríamos de um sistema discreto  $H_d(z)$  que imitasse o comportamento de  $H(s)$  com tanta fidelidade quanto possível. A solução ideal já é conhecida:

$$H_i(z) = H(s)|_{s=\frac{1}{T} \ln z}$$

Infelizmente esta é uma expressão selvagem e intratável de  $z$  e temos que nos contentar com aproximações. Supondo que temos uma aproximação, quão boa é ela? quão bem  $H_d(z)$  cumpre seu papel de substituto? quão próximo está da solução ideal  $H_i(z)$ ?

## 2.6 Sinais quantizados e digitais

Consideremos uma aplicação  $f$  entre os conjuntos  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{C}$ :

$$f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$$

Quando o domínio  $\mathcal{D}$  e o contradomínio  $\mathcal{C}$  forem o conjunto  $\mathbb{R}$  dos reais teremos um sinal contínuo que, como já vimos, pode ser representado pelos símbolos  $\{f(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$  ou então  $\{f(t)\}$  ou ainda  $f(t)$ . Quando o domínio  $\mathcal{D}$  é o conjunto  $\mathbb{Z}$  dos inteiros e  $\mathcal{C} = \mathbb{R}$  temos as seqüências ou sinais discretos, simbolizadas por  $\{f(k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$  ou então  $\{f(k)\}$  ou ainda  $f(k)$ .

Diremos que um sinal, contínuo ou discreto, é **quantizado** quando  $x(t)$  (ou  $x(k)$ , conforme o caso) não mais é livre para assumir qualquer possível valor real, ficando restrito a apenas um número finito de valores admissíveis. Para tornar essa idéia mais rigorosa definiremos um conjunto  $\mathcal{Q}$  de  $n$  números reais:

$$\mathcal{Q} = \{q_i \in \mathbb{R} \mid i = 0, 1, \dots, n-1\} = \{q_0, q_1, \dots, q_{n-1}\} \subset \mathbb{R}$$

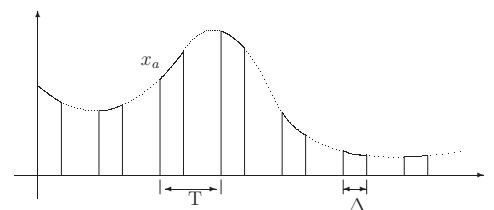
Os reais  $q_i$  são chamados de **valores** ou **níveis de quantização**. Um sinal é quantizado quando o contradomínio  $\mathcal{C}$  é o conjunto  $\mathcal{Q}$ , e as possibilidades de interesse são

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{Q} \quad \text{ou} \quad f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{Q}$$

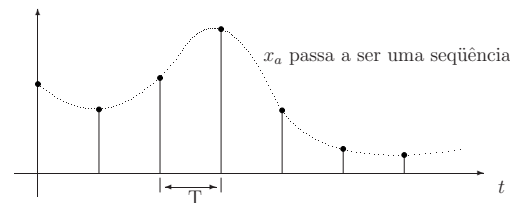
os sinais quantizados contínuos e quantizados discretos. Uma ilustração para os primeiros é

## 2.3 Amostragem Pulsada, Impulsiva e Instantânea

Retomemos a idéia de amostragem pulsada. Dado um sinal  $x(t)$ , como o ilustrado anteriormente, o resultado de uma amostragem com período  $T$ , escolhido de modo a satisfazer o teorema da amostragem, e duração de amostra  $\Delta$ , já apresentada, é aqui repetida



A energia do sinal amostrado  $x_a$ , medida pela área sob seu gráfico, é menor do que a energia do sinal original  $x(t)$ , como se percebe visualmente, e isto pode ser muito vantajoso em várias situações. Um ponto interessante pode ser levantado: no que toca ao teorema da amostragem, a largura dos pulsos do sinal amostrador é irrelevante, e assim, se diminuirmos o valor de  $\Delta$  a energia de  $x_a$  diminui mais ainda, e isto não afeta a recuperação de informações, que depende apenas do período de amostragem  $T$ . Podemos até mesmo pensar em um caso limite, quando  $\Delta \rightarrow 0$ . A largura das amostras seria tão pequena que cada amostra seria apenas um número real, e o sinal amostrado seria uma seqüência:



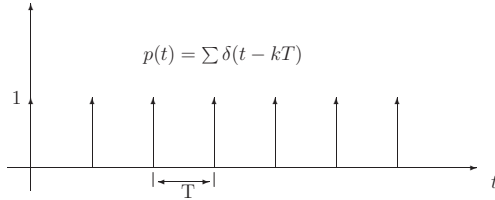
Esta situação é chamada de **Amostragem Instantânea** ou **Ideal**: dado

um sinal contínuo  $x(t)$  o seu resultado é um sinal discreto, uma sequência definida por  $x_a(k) = x(kT)$ . Se o teorema da amostragem é satisfeito, teríamos um sinal discreto capaz de substituir um sinal contínuo.

Sinal contínuo  $x(t) \longrightarrow$  sinal discreto  $\{x_a\}$  dado por  $x_a(k) = x(kT)$

Esta idéia de amostragem instantânea é muito atraente, permite que uma sequência represente um sinal contínuo, desde que a frequência de amostragem seja adequada. Mas, infelizmente, uma análise mais profunda revela que os dispositivos práticos teriam enormes dificuldades para gerar amostragens muito estreitas; e é fácil ver isto, pois quando  $\Delta \rightarrow 0$  a energia do sinal  $x_a$  também tende a zero, ou seja o amostrador bloqueia completamente o sinal.

Mas algo pode ser feito. Se a altura  $A$  dos pulsos do sinal amostrador não mais são unitárias, mas crescem quando eles ficam estreitos, ou seja, se impomos  $A = 1/\Delta$ , o resultado do processo de limite é um trem de impulsos unitários

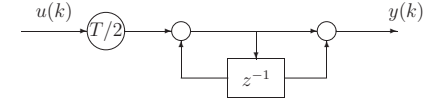


E está configurada a **amostragem impulsiva**: a multiplicação de um sinal contínuo  $x(t)$  por um trem de impulsos unitários igualmente espaçados

$$\begin{aligned} x_a(t) &= x(t)p(t) \\ &= x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - kT) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT) \end{aligned}$$

Por incrível que pareça este sinal  $x_a(t)$  é contínuo e podemos representá-lo graficamente como uma sucessão de impulsos cujas amplitudes dependem dos valores de  $x(t)$  nos instantes de amostragem:

tempo não é crucial, como por exemplo em processamento “off line” ele deve ser escolhido. Um diagrama de blocos para representar o algoritmo é



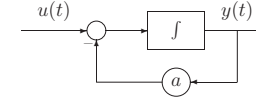
### 2.5.3 Substitutos discretos aproximados

Encontramos substitutos discretos para os sistemas mais simples, os integradores. Que dizer de outros sistemas menos triviais, que acontece no caso geral?

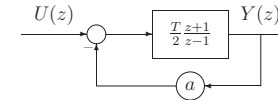
**Exemplo 2.5.1** Seja um sistema linear invariante no tempo caracterizado pelos modelos abaixo

$$H(s) = \frac{1}{s+a} \implies (s+a)Y(s) = U(s) \implies \dot{y}(t) + ay(t) = u(t)$$

Este modelo pode ser visualizado por meio do diagrama



Este diagrama de blocos é uma realização para o modelo contínuo, onde a integração inerente ao processo original está enfatizada. Mas já sabemos como substituir integradores contínuos! Usando, por exemplo, o método trapézoidal.



A função de transferência global ficaria

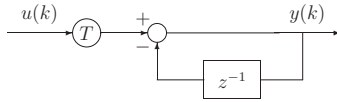
Esta aproximação é tão boa quanto a aproximação usada para o integrador.

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + TU(z) \implies Y(z) = \frac{T}{1 - z^{-1}}U(z)$$

donde se calcula a função de transferência do integrador discreto

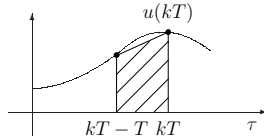
$$H_d(z) = \frac{T}{1 - z^{-1}} = T \frac{z}{z - 1}$$

Este método também produz uma aproximação boa, e tão rápida quanto a outra. Um diagrama de blocos para representar o algoritmo é



**Integração trapezoidal:**  $\Delta = T (u(kT - T) + u(kT))/2$

Ao invés de retângulos, um trapézio fornece uma aproximação claramente melhor; este método é chamado de método de **Newton-Raphson**.



Integração Trapezoidal  
método “Newton-Raphson”

A equação de diferenças fica

$$y(kT) = y(kT - T) + \frac{T}{2} u(kT) + \frac{T}{2} u(kT - T)$$

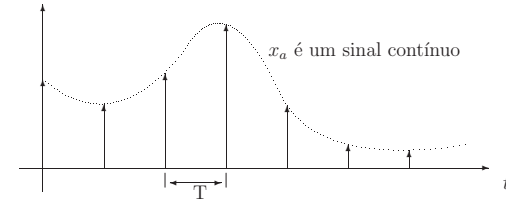
Achando as transformadas

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + \frac{T}{2} U(z) + \frac{T}{2} z^{-1}U(z) \implies Y(z) = \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} U(z)$$

donde se calcula a função de transferência do integrador discreto

$$H_d(z) = \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{T}{2} \frac{z + 1}{z - 1}$$

Este método produz uma aproximação melhor que as outras, porém é mais lento, pois um número maior de operações tem de ser feito. Quando o



Impulsos são idealizações muito cómodas, pois permitem o estabelecimento de propriedades importantes. Em amostradores reais usaríamos pulsos estreitos, que aproximam bastante bem a situação ideal.

O importante é perceber que a amostragem impulsiva gera um sinal contínuo  $x_a(t)$  que corresponde perfeitamente à sequência  $x_a(k) = x(kT)$  resultante da amostragem instantânea. Encontrando a transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x_a(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT) e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \int_{0^-}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs} \end{aligned}$$

O sinal discreto correspondente é, como visto acima, a sequência  $\{x_a\} = \{x(kT)\}$  para a qual podemos encontrar a transformada em  $z$ :

$$\mathcal{Z}\{x_a\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$$

A transformada de Laplace e a transformada em  $z$  de sinais correspondentes, comparando-as podemos estabelecer a seguinte ligação

$$z^{-k} \longleftrightarrow e^{-kTs}$$

ou seja:

$$z \longleftrightarrow e^{sT} \quad \text{ou, equivalentemente} \quad s \longleftrightarrow \frac{1}{T} \ln z$$

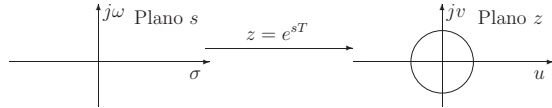
Isto nos permitiria passar do campo contínuo ao discreto, e vice-versa, com uma simples troca de variáveis:

$$\mathcal{L}\{x_a\} = \mathcal{Z}\{x_a\}|_{z=e^{sT}} \quad \text{e} \quad \mathcal{Z}\{x_a\} = \mathcal{L}\{x_a\}|_{s=\frac{1}{T}\ln z}$$

Ou seja, dado um sinal contínuo, através da transformada de Laplace de sua amostragem impulsiva é imediato obter a transformada em  $z$  de uma amostra instantânea, com período  $T$ , deste sinal. E vice-versa. A relação entre as variáveis  $s$  e  $z$  pode ser estudada mais profundamente:

$$s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad z \leftrightarrow e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |z| = e^{\sigma T} \\ \angle z = \omega T \end{cases}$$

Fixando  $\sigma = 0$  e deixando  $\omega$  variar de  $-\infty$  a  $\infty$  o complexo  $s = j\omega$  percorre o eixo imaginário do plano  $s$ , fronteira importante entre as regiões estável e instável. É fácil verificar que a região correspondente do plano  $z$  será dada por  $z = e^{j\omega T}$ . Ou seja, o eixo imaginário do plano  $s$  é mapeado na circunferência de raio unitário e centrada na origem do plano  $z$ .



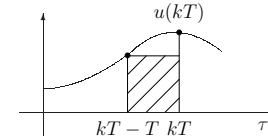
O estudo da estabilidade dos operadores discretos pode ser muito beneficiado por esta correspondência: o semiplano esquerdo do plano  $s$  seria mapeado no interior da circunferência acima, indicando que a região “estável” para os operadores discretos é o círculo, ou disco de raio unitário e centrado na origem.

Outra aplicação interessante refere-se à amostragem de sinais senoidais. Seja o sinal senoidal

$$x_1(t) = \sin \omega_0 t, \quad \text{com período} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{e} \quad f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Este sinal é caracterizado, como bem sabemos, pelos pólos de sua transformada de Laplace, os pontos  $\pm j\omega_0$ , no eixo imaginário. Discretizando este sinal por meio de uma amostragem instantânea de período  $T_a$  obteríamos a sequência

$$\{x_a\} \quad \text{definida por} \quad x_a(k) = x_1(kT_a) = \sin(\omega_0 T_a k)$$



Integração Retangular  
método “Backward Euler”

A equação de diferenças fica

$$y(kT) = y(kT - T) + Tu(kT - T)$$

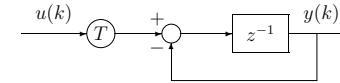
Achando as transformadas

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + Tz^{-1}U(z) \quad \Rightarrow \quad Y(z) = \frac{Tz^{-1}}{1 - z^{-1}}U(z)$$

donde se calcula a função de transferência do integrador discreto

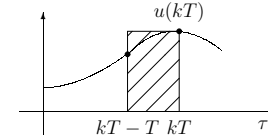
$$H_d(z) = \frac{Tz^{-1}}{1 - z^{-1}} = T \frac{1}{z - 1}$$

Este método produz uma aproximação boa e rápida. Um diagrama de blocos para representar o algoritmo é



**Integração retangular:**  $\Delta = Tu(kT)$

Este método também é chamado de método de **Euler avançado**.



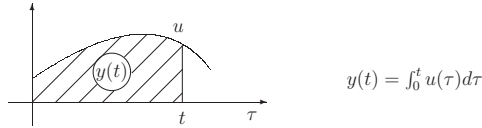
Integração Retangular  
método “Forward Euler”

A equação de diferenças fica

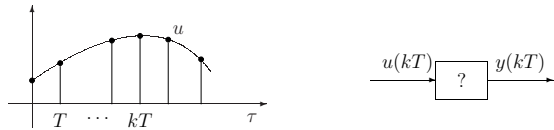
$$y(kT) = y(kT - T) + Tu(kT)$$

Achando as transformadas

Como sempre, a integral pode ser associada à área sob a curva da entrada.



Amostrando o sinal  $u$  com período  $T$  temos a entrada para o substituto discreto.



Dada a sequência  $\{u(kT)\}$  gostaríamos de encontrar a sequência de saída  $\{y(kT)\}$  de tal modo que

$$y(kT) = \int_0^{kT} u(\tau) d\tau$$

onde  $u(\tau)$  é o sinal contínuo que gera  $\{u(kT)\}$ . Podemos trivialmente decompor a integral em

$$y(kT) = \int_0^{kT-T} u(\tau) d\tau + \int_{kT-T}^{kT} u(\tau) d\tau = y(kT-T) + \Delta$$

onde  $\Delta$  é a área sob a curva de  $u(\tau)$  entre o  $k$ -ésimo instante de amostragem e o instante anterior. Expressando  $\Delta$  em termos de  $y$  e de  $u$  encontraremos uma equação de diferenças que representa a integração discreta. Existem várias possíveis maneiras de escolher tal aproximação para  $\Delta$ , analisaremos apenas três dentre as mais comumente usadas.

**Integração retangular:**  $\Delta = Tu(kT - T)$

Por motivos óbvios este método é chamado de integração **retangular**, ou então método de **Euler atrasado**.

cuja transformada em  $z$ , designada por  $X_a(z)$  é caracterizada pelos pontos  $e^{j\omega_0 T_a}$  e  $e^{-j\omega_0 T_a}$ , complexos conjugados na circunferência de raio unitário. Para estabelecer este fato basta analisar a expressão

$$X_a(z) = \frac{z \sen \theta_0}{z^2 - 2 \cos \theta_0 z + 1} = \frac{z \sen \theta_0}{(z - \cos \theta_0 - j \sen \theta_0)(z - \cos \theta_0 + j \sen \theta_0)}$$

onde  $\theta_0 = \omega_0 T_a$ .

Para um valor fixo de  $\omega_0$ , se  $T_a$  for muito pequeno, ou, equivalentemente, a frequência de amostragem  $f_a$  for muito alta, os pontos  $e^{\pm j\omega_0 T_a}$  tendem ao ponto  $e^{j0} = 1$ , a extremidade mais à direita da circunferência. Para amostragens menos seguras, ou seja, quando a frequência  $f_a$  cai e o período  $T_a$  aumenta, estes pontos migram para a esquerda da circunferência. Até onde? Pelo teorema da Amostragem, o processo é seguro se e somente se

$$f_a > 2f_0 \iff \frac{1}{T_a} > \frac{\omega_0}{\pi} \iff \theta_0 = \omega_0 T_a < \pi$$

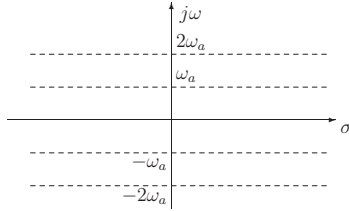
O limite das amostragens seguras é então o ponto  $e^{j\pi}$ , a extremidade mais à esquerda da circunferência.

Seja agora outro sinal  $x_2(t) = \sen(\omega_0 + \omega_a)t$ , com  $\omega_a = 2\pi/T_a$ . Esta senóide tem frequência mais alta que a do sinal anterior. Supondo que usamos uma amostragem segura para  $x_1$ , os leitores são convidados a encontrar a posição no plano  $z$  dos pontos que caracterizam a sequência  $\{x_2\}$  definida por  $x_2(k) = x_2(kT_a)$ . Não apenas a encontrar estas posições, mas também, e principalmente, a interpretar estes resultados.

Considere os complexos  $s_1 = \sigma + j\omega$  e  $s_2 = \sigma + j(\omega + \omega_a)$  onde  $\omega_a = 2\pi/T_a$ . Achando os correspondentes no plano  $z$ :

$$\begin{aligned} s_1 = \sigma + j\omega &\iff z_1 = e^{\sigma T_a} e^{j\omega T_a} \\ s_2 = \sigma + j(\omega + \omega_a) &\iff z_2 = e^{\sigma T_a} e^{j(\omega + \omega_a)T_a} = e^{\sigma T_a} e^{j(\omega T_a + 2\pi)} = z_1 \end{aligned}$$

Simplex, e mostra que o plano  $s$  pode ser dividido em fatias horizontais de largura  $\omega_a$ , das quais as duas adjacentes, que se ligam pelo eixo real, formam o que se poderia chamar de faixa básica: pontos de outras fatias sempre coincidirão com imagens de pontos da faixa básica.



## 2.4 Aspectos Importantes da Amostragem

A idéia é relacionar propriedades do sinal contínuo  $x(t)$  e do sinal discreto  $x_a(k) = x(kT)$  e descobrir como estas propriedades dependem da frequência de amostragem  $f_a = 1/T$ . A sequência  $x_a(k) = x(kT)$  é chamada de **discretização com período  $T$**  do sinal  $x(t)$ , ou seja, é o resultado de uma amostragem instantânea de  $x(t)$ .

A amostragem instantânea tem uma importância teórica grande, pois associa a um sinal  $x(t)$  uma sequência, funcionando assim como canal de ligação entre os mundos contínuo e discreto. Mas é bom deixar claro que a amostragem instantânea é um recurso abstrato, um artifício para facilitar as coisas, e que para estabelecer formalmente alguns resultados é necessário usar os conceitos de amostragem impulsiva. A seção anterior mostra como estas amostragens (a instantânea e a impulsiva) produzem resultados correspondentes, e assim vamos lá, começando por encontrar a série de Fourier do trem de impulsos:

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_a t} \quad \text{onde} \quad C_k = \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j2\pi k f_a t} dt = \frac{1}{T} = f_a$$

o que permitiria a obtenção da transformada de Fourier do sinal  $x_a(t)$ , resultado da amostragem impulsiva de  $x(t)$ , e que, lembremos, é um sinal contínuo, por estranho que possa parecer. Sendo  $X(f)$  a transformada de Fourier de  $x(t)$ , chegaríamos a

$$X_a(f) = f_a \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - k f_a)$$

ou seja, cópias idênticas do espectro de  $x(t)$  multiplicadas por  $f_a$  e espaçadas entre si por  $f_a$ . Supondo que o sinal original é de banda limitada e que a taxa  $f_a$  foi bem escolhida teremos

### 2.5.1 Substitutos Discretos

O problema básico, apresentado acima, é: dado um sistema contínuo encontrar, se existir, um sistema discreto que, quando alimentado com uma amostragem da entrada do SC fornece como saída uma amostragem da saída do SC.

Sendo  $H(s)$  o modelo do sistema contínuo podemos tentar um primeiro palpite: será que

$$H_d(z) = H(s)|_{s=z}$$

se qualifica como substituto discreto? Para facilitar a análise, sendo o sistema contínuo um integrador o sistema discreto descrito por

$$H_d(z) = \frac{1}{s} \Big|_{s=z} = \frac{1}{z} = z^{-1}$$

integra as sequências que lhe são aplicadas como entradas? Ou seja, quando  $u = 1(k)$  a saída correspondente será  $y = k \cdot 1(k)$ ? É claro que  $z^{-1}$  não cumpre esta tarefa, pois este sistema atrasa unitariamente qualquer sequência de entrada. Continuamos no mercado, buscando um bom substituto discreto.

Lembremos a seção sobre amostragem, quando se deduziu a relação fundamental entre os campos contínuo e discreto, sintetizada das expressões

$$z = e^{sT} \quad \text{ou, equivalentemente} \quad s = \frac{1}{T} \ln z$$

Daqui podemos deduzir o **Substituto Discreto Ideal**:

$$H_d(z) = H(s)|_{s=\frac{1}{T} \ln z}$$

Mas isto acarreta problemas: a função de transferência discreta não é racional, é uma função intratável de  $z$ . A partir desta constatação somos forçados a procurar os chamados **Substitutos Discretos Aproximados**. Vamos começar com uma classe importante de sistemas, os integradores.

### 2.5.2 Integração numérica

Também chamada de integração discreta. Para a integração contínua temos  $H(s) = 1/s$  ou

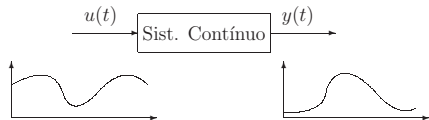
$$\begin{array}{ccc} u(\cdot) \rightarrow & \boxed{\int} & \rightarrow y(\cdot) \end{array} \quad Y(s) = H(s)U(s) \quad H(s) = \frac{1}{s}$$

dispositivo físico

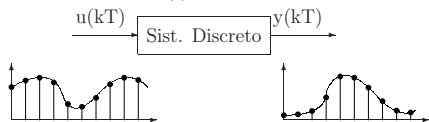
comportamento muito similar a  $H(s)$

Durante muitos anos as coisas funcionavam exatamente dessa maneira, sempre. E ainda funcionam, mas não mais em todas as ocasiões, pois agora entra em cena um novo personagem. Uma questão muito natural é: ao invés de usar os tipos de componentes acima listados e separados por todos aqueles e/ous, para sintetizar uma dada  $H(s)$ , seria possível usar outras coisas? Os computadores digitais são, a cada minuto, mais poderosos e baratos; poderíamos usá-los?

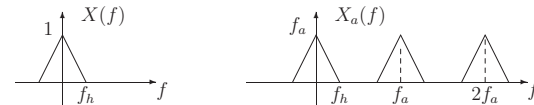
Raciocinemos. Temos uma situação contínua, modelada por um sistema que transforma uma dada entrada  $u(t)$  em uma saída  $y(t)$ .



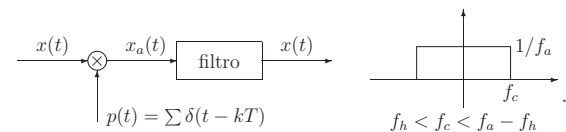
Um computador digital lida com sinais digitais, claro, mas como vimos anteriormente, todo o material de sinais e sistemas discretos pode ser usado para facilitar o seu estudo. Em outras palavras, um computador digital, quando nos abstraímos de alguns detalhes, pode ser encarado como um sistema discreto, o que conduz à pergunta: dado um sistema contínuo, existiria um sistema discreto tal que quando excitado pela sequência resultante da amostragem da entrada contínua  $u(t)$ , sua saída fosse a sequência resultante da amostragem da saída contínua  $y(t)$ ?



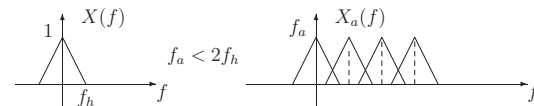
Se tal sistema existir, será ele também linear quando o sistema contínuo for? Se sim, qual seria sua função de transferência  $H_d(z)$ ? Deve ficar claro que a existência de tal versão discreta para  $H(s)$  é extremamente desejável porque possibilita o uso de computadores digitais para sintetizar funções de transferência contínuas. Abrem-se os campos, vastos, novos e importantes, de filtros digitais e controle digital; estamos começando a arranhar sua superfície.



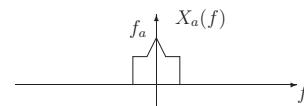
O método de recuperação do sinal original  $x(t)$  a partir das amostras contidas em  $x_a(t)$  salta aos olhos: basta um filtro passa-baixas com frequência de corte entre  $f_h$  e  $f_a - f_h$ .



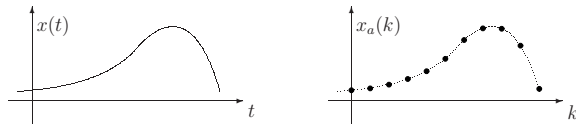
Os efeitos de uma amostragem com baixa frequência, inferior à de Nyquist, ficam claros. Para o sinal acima teríamos



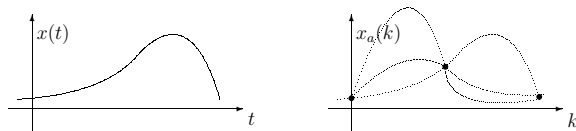
Após o filtro passa-baixas de recuperação obteríamos um sinal com espectro do tipo



Este fenômeno causado por frequências de amostragem muito baixas é chamado de “aliasing” e indica sérias dificuldades e mesmo impossibilidades para se recuperar o sinal original a partir das amostras. Para a visualização deste efeito no domínio do tempo consideremos o gráfico de um sinal contínuo e o de sua discretização (amostragem instantânea) feita com taxa segura:



As amostras estão próximas umas das outras e permitem uma fácil reconstrução do sinal. Isto pode ser feito até mesmo de maneira gráfica, unindo amostras consecutivas por segmentos de retas e assim gerando reconstituições aproximadas mas razoáveis. Já quando a amostragem é insuficiente teríamos poucas amostras, e muito espaçadas entre si:

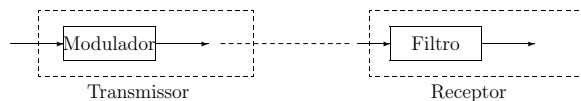


Muitas opções poderiam servir, com escolher uma dentre elas?

A amostragem de senóides fornece outra ilustração simples e direta. A partir do sinal  $x_1(t) = \sin \omega_0 t$ , usando como taxa o limite inferior de segurança  $T_a = \pi / \omega_0 = T_0 / 2$  capturaríamos apenas os pontos onde a curva se anula, ou seja,  $x_a(k) = 0 \forall k$ .

## 2.5 Uso de Sistemas Discretos

Voltemos a atenção, por alguns instantes, para duas situações da vida real onde sistemas contínuos são usados. A primeira delas envolve uma cadeia de transmissão e recepção de sinais por meio de ondas de rádio. Se for usada a modulação de amplitude o esquema resultante é, como já vimos, representado por



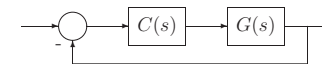
Tudo está pronto, exceto o filtro do receptor. Seu projetista coleta os dados globais necessários, a banda de passagem, etc, e seu resultado final é sempre algo do tipo:

O filtro desejado deve ter a resposta ao impulso  $h(t)$

ou então

O filtro desejado deve ter a função de transferência  $H(s)$ .

A outra situação mencionada refere-se a um sistema, caracterizado pela função de transferência  $G(s)$ , com características indesejadas que devem ser modificadas. Como fazer? Essa é uma longa e maravilhosa história que pode estar começando agora para os leitores afortunados, e que pode prosseguir por vidas afora. Deixando de fora os excitantes detalhes, quase sempre as boas soluções envolvem a construção de um sistema chamado compensador que deve ser conectado ao sistema original de acordo com o esquema seguinte.



A tarefa do especialista em Controle é determinar as características do compensador necessário e seu resultado final será, quase sempre, algo do tipo:

O compensador desejado deve ter a resposta ao impulso  $c(t)$

ou então

O compensador desejado deve ter a função de transferência  $C(s)$ .

Estas situações são semelhantes, pois o primeiro passo de projeto requer a construção de um sistema que apresente uma certa função de transferência desejada  $H(s)$ . Como se pode conseguir isso?

Neste ponto entra o engenheiro de circuitos que sabe muito bem como resolver este tipo de problema. Dada a tal  $H(s)$  ele lança mão de resistores e/ou capacitores e/ou indutores e/ou transformadores e/ou amplificadores operacionais e/ou o que mais houver no seu almoxarifado que seja necessário, faz com estes ingredientes e com as receitas normais do seu ramo uma sábia poção e voilà, temos pronto um sistema real e concreto, uma “caixa” cheia de componentes, um dispositivo físico cujo comportamento é muito próximo ao comportamento modelado por  $G(s)$  e de deverá ser usada na solução do problema real original.