Universidade Federal do Rio de Janeiro
Escola Politécnica

DATA / /

GRAUS 1 2 3 4 5

Aluno: Aula Teórica #7

Disciplina: EEL315 — Eletrônica I

Turma:

Professor: José Gabriel

3.2 Valor RMS ("root mean square") ou Valor Eficaz (V_{RMS})

$$\boxed{V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt}}$$

ou, de forma equivalente

$$\boxed{V_{RMS}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt}$$

Obs.: no osciloscópio: coloque o osciloscópio em modo "CC" e peça a medida "RMS". No simulador, a definição de valor ~~médio~~ eficaz ("RMS(·)") é um pouco diferente: $V_{RMS}^2 = \frac{1}{t}\int_0^t v^2(\tau)\,d\tau$, onde "t" é o instante atual. Para formas de onda periódicas, as definições coincidem sempre que t é múltiplo de T.

Vamos repetir, agora, as mesmas situações interessantes que foram vistas na Seção 3.1.

3.2.1 Forma de Onda Genérica ($v(t) = V_{DC} + v_{AC}(t)$)

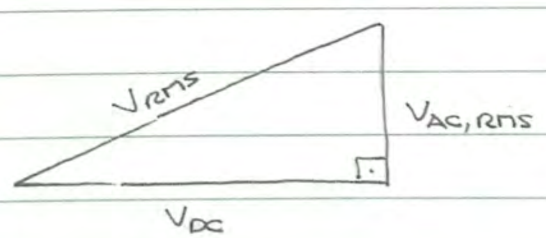
$$V_{RMS}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T (V_{DC} + v_{AC}(t))^2\,dt$$

$(v_{AC}(t))$

$$V_{RMS}^2 = \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T V_{DC}^2\,dt}_{V_{DC}^2} + \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T 2V_{DC}v_{AC}(t)\,dt}_{\frac{2V_{DC}}{T}\underbrace{\int_0^T v_{AC}(t)\,dt}_{0}} + \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T v_{AC}^2(t)\,dt}$$

Vamos chamar este termo de $V_{AC,RMS}$. É o valor eficaz só da parte alternada da forma de onda $v(t)$. Obs.: no osciloscópio: coloque o osciloscópio em modo "CA" (= "AC") e peça a medida "RMS".

Então: $\boxed{V_{RMS}^2 = V_{DC}^2 + V_{AC,RMS}^2}$



3.2.2 Forma de Onda Senoidal ($v(t) = V_{DC} + A\sin(\omega t)$)

$$V_{RMS}^2 = V_{DC}^2 + \frac{1}{T}\int_0^T A^2 \sin^2(\omega t)\,dt$$

$$V_{RMS}^2 = V_{DC}^2 + \frac{A^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt = V_{DC}^2 + \frac{A^2}{T}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}\right)\Bigg|_0^T$$

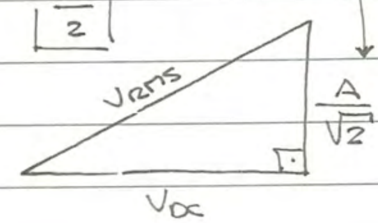
Obs.: para provar que $\int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt = \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}\right)\Big|_0^T$, use:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\boxed{V_{AC,RMS} = \frac{A}{\sqrt{2}}}$$

$$V_{RMS}^2 = V_{DC}^2 + \frac{A^2}{T}\left(\frac{T}{2} - \frac{\sin(4\pi)}{8\pi/T} - 0 + \frac{\sin(0)}{8\pi/T}\right) = V_{DC}^2 + \boxed{\frac{A^2}{2}}$$

E, se $V_{DC} = 0$, então $\boxed{V_{RMS} = \frac{A}{\sqrt{2}}}$



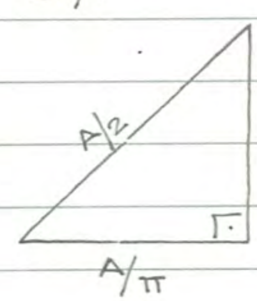
3.2.3 Senóide Retificada em Meia Onda

Conforme a Secção 3.1.3, temos
$$v(t) = \begin{cases} A\sin(\omega t), & \text{se } 0 < t < T/2 \\ 0, & \text{se } T/2 < t < T \end{cases}$$

$$V_{RMS}^2 = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} A^2 \sin^2(\omega t)\,dt = \frac{A^2}{T}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}\right)\Bigg|_0^{T/2}$$

$$= \frac{A^2}{T}\left(\frac{T}{4} - \frac{\sin(2\pi)}{8\pi/T} - 0 + \frac{\sin(0)}{8\pi/T}\right) = \frac{A^2}{4}$$

Então $\boxed{V_{RMS} = \frac{A}{2}}$



Pode ser calculado:

$$V_{AC,RMS}^2 = \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2}$$

3.2.4 Senóide Retificada em Onda Completa

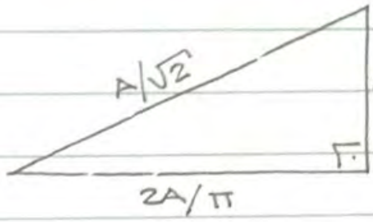
Conforme a Secção 3.1.4, temos
$$v(t) = \begin{cases} A\sin(\omega t), & \text{se } 0 < t < T/2 \\ -A\sin(\omega t), & \text{se } T/2 < t < T \end{cases}$$

$$V_{RMS}^2 = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} A^2 \sin^2(\omega t)\,dt + \underbrace{\frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} A^2 \sin^2(\omega t)\,dt}$$

Mostre, como exercício, que este termo também vale $\frac{A^2}{4}$.

$$V_{RMS}^2 = \frac{1}{T}\int_0^{T} A^2 \sin^2(\omega t)\,dt = \frac{A^2}{2}$$

Então: $\boxed{V_{RMS} = \frac{A}{\sqrt{2}}}$



Também pode ser calculado.

(3.2.5) Onda "Dente de Serra"

Há duas maneiras de fazer o cálculo do valor eficaz da onda dente de serra.

a) Cálculo "direto" (mais trabalhoso): usando a definição de $v(t)$ em termos de V_1 e V_2, que foi dada na Seção 3.1.5, temos:

$$V_{RMS}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \left(V_1 - \frac{t}{T}(V_1 - V_2)\right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \left(V_1^2 + \frac{t^2}{T^2}(V_1^2 - 2V_1V_2 + V_2^2) - \frac{2tV_1^2}{T} + \frac{2tV_1V_2}{T}\right) dt$$

$$= \frac{1}{T}\left(TV_1^2 + \frac{t^3}{3T^2}(V_1^2 - 2V_1V_2 + V_2^2)\Big|_0^T - \frac{t^2V_1^2}{T}\Big|_0^T + \frac{t^2V_1V_2}{T}\Big|_0^T \right)$$

$$= \frac{1}{T}\left(TV_1^2 + \frac{T}{3}(V_1^2 - 2V_1V_2 + V_2^2) - TV_1^2 + TV_1V_2\right) = \boxed{\frac{1}{3}(V_1^2 + V_1V_2 + V_2^2)}$$

E então: $$V_{RMS}^2 = \frac{V_1^2}{3} + \frac{V_1V_2}{3} + \frac{V_2^2}{3}$$

$(-)$ $$V_{DC}^2 = \frac{V_1^2}{4} + \frac{V_1V_2}{2} + \frac{V_2^2}{4}$$ (porque $V_{DC} = (V_1 + V_2)/2$)

$$V_{AC,RMS}^2 = \frac{V_1^2}{12} - \frac{V_1V_2}{6} + \frac{V_2^2}{12} = \frac{\left(\frac{V_1 - V_2}{2}\right)^2}{3} = \text{"}\frac{V_{R,P}^2}{3}\text{"}$$

Definindo a ondulação de pico (dizemos "ripple" de pico) $V_{R,P} \triangleq \frac{V_1 - V_2}{2}$,

temos então $\boxed{V_{AC,RMS} = \frac{V_{R,P}}{\sqrt{3}}}$ para a onda dente de serra.

Vale a pena esclarecer a notação:

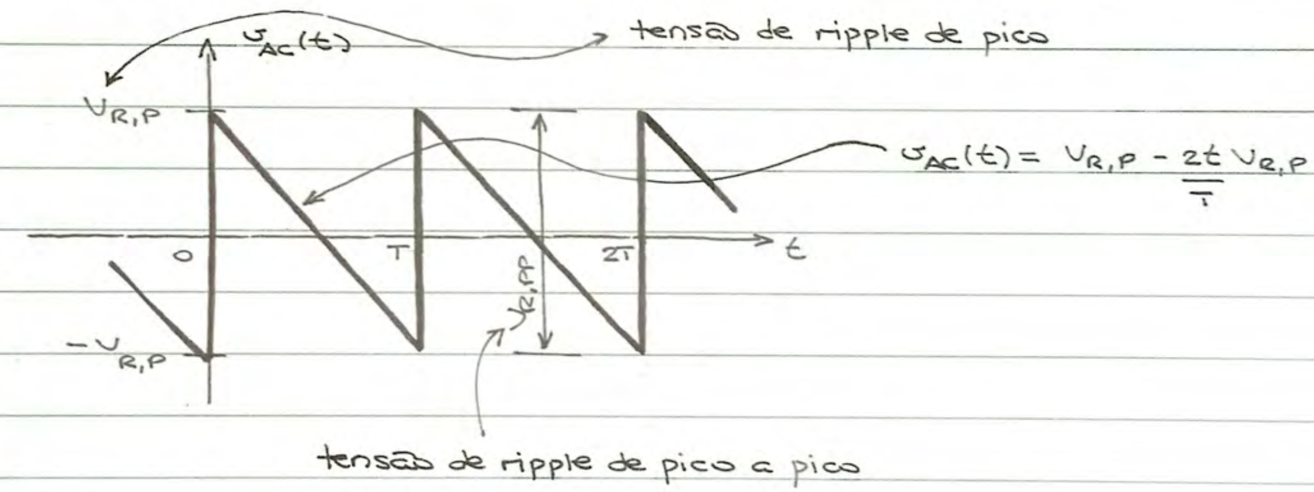
Ondulação de pico, "ripple" de pico, "tensão de ripple de pico" $\qquad V_{R,P} = \dfrac{V_1 - V_2}{2}$

Ondulação de pico a pico, "ripple" de pico a pico, "tensão de ripple de pico a pico" $\qquad V_{R,PP} = V_1 - V_2$

"Tensão de ripple" (formas de onda em geral, incluindo dente-de-serra) $\qquad V_{AC,RMS}$ e, às vezes, $v_{AC}(t)$

A definição do "ripple" de pico (ou ondulação de pico) facilita o cálculo de $V_{AC,RMS} = V_{R,P}/\sqrt{3}$ no caso da forma de onda "dente-de-serra".

b) Cálculo começando por $V_{AC,RMS} = V_{R,P}/\sqrt{3}$ (mais simples): analisemos somente $v_{AC}(t)$:

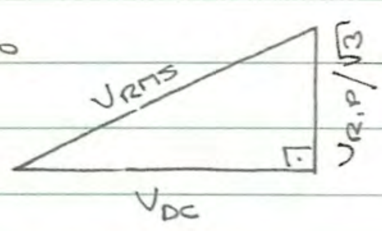


$$V_{AC,RMS}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \left(1 - \frac{2t}{T}\right)^2 V_{R,P}^2\, dt = \frac{V_{R,P}^2}{T}\int_0^T \left(1 - \frac{2t}{T}\right)^2 dt$$

$$= \frac{V_{R,P}^2}{T}\int_0^T \left(1 - \frac{4t}{T} + \frac{4t^2}{T^2}\right) dt = \frac{V_{R,P}^2}{T}\left(t\Big|_0^T - \frac{4t^2}{2T}\Big|_0^T + \frac{4t^3}{3T^2}\Big|_0^T \right)$$

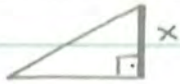
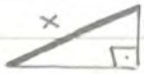
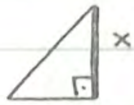
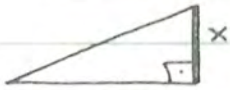
$$= \frac{V_{R,P}^2}{T}\left(T - 2T + \frac{4T}{3}\right) = \frac{V_{R,P}^2}{3} \implies \boxed{V_{AC,RMS} = \frac{V_{R,P}}{\sqrt{3}}}$$

E usando o triângulo



, temos: $\boxed{V_{RMS}^2 = V_{DC}^2 + \dfrac{V_{R,P}^2}{3}}$

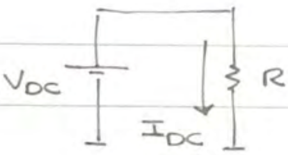
Resumindo as Seções 3.1 e 3.2:

	$\frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,dt$	$\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt}$	$V_{AC,RMS}$
3.x.1 Forma de onda qualquer	V_{DC}	V_{RMS}	
3.x.2 Senóide com nível médio V_{DC} e amplitude A	V_{DC}		$A/\sqrt{2}$
3.x.3 Senóide retificada (meia onda)	A/π	$A/2$	
3.x.4 Senóide retificada (onda completa)	$2A/\pi$	$A/\sqrt{2}$	
3.x.5 "Dente-de-serra"	$\frac{V_1+V_2}{2}$		$\frac{V_{R,P}}{\sqrt{3}}$

3.3 Potência Instantânea e Potência Eficaz

$\underbrace{\text{Potência Instantânea}}_{p(t)}$ e $\underbrace{\text{Potência Eficaz}}_{P_{AVG}}$

Tensão constante:

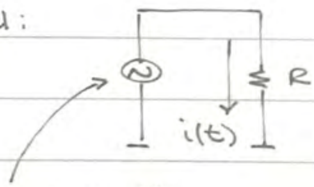


$P = V_{DC} I_{DC} = V_{DC}^2/R$

Exemplo: $V_{DC} = 1\,V$; $R = 1\,k\Omega$

$\boxed{P = 1\,mW}$ (1 "miliwatt")

Tensão variável:



$v(t) = V_{DC} + v_{AC}(t)$

Potência Instantânea: $p(t) = v(t)\,i(t)$

Potência "média", ou potência "eficaz":

$$\boxed{P_{AVG} = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,i(t)\,dt}$$

(= "AVG(v*i)", no OrCAD)

$$P_{AVG} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{v^2(t)}{R}\,dt = \frac{1}{R}\cdot\left(\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt\right) \Rightarrow \boxed{P_{AVG} = \frac{V_{RMS}^2}{R}}$$

Exemplo: $v(t)$ = senóide retificada em meia onda com $A = 2\,V$.

Então: $V_{RMS} = \frac{A}{2} = 1\,V$.

Se $R = 1\,k\Omega$, então $\boxed{P = 1\,mW}$.

Ou seja: com relação à potência média dissipada sobre um resistor, a tensão constante V_{DC} (com $v_{AC}(t) = 0$) e a tensão variável $v(t)$ com V_{RMS} igual ao V_{DC} da fonte de tensão constante são equivalentes.

Alguns links interessantes:

Wikipedia: root mean square

Wikipedia: electric power (ver só "resistive")

Wikipedia: ripple (electrical)