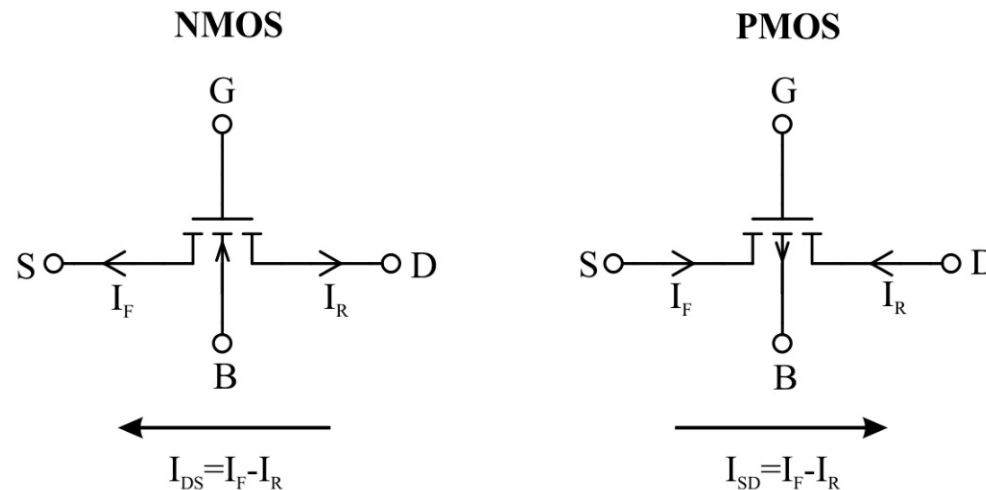


Modelo EKV

O modelo EKV foi desenvolvido pelos pesquisadores C. C. Enz, F. Krummenacher e E. A. Vittoz, daí as iniciais, e é um modelo compacto, totalmente simétrico e abrange todos os modos de operação e regiões de trabalho. A Corrente I_{DS} é composta por duas outras correntes, a direta I_F e a reversa I_R .



Corrente direta I_F no NMOS

$$\frac{V_G - V_{T0} - n_F V_S}{n_F \phi_T} = \sqrt{1 + 4 \frac{I_F}{I_{ESP}}} + \ln \left(\sqrt{1 + 4 \frac{I_F}{I_{ESP}}} - 1 \right) - (1 + \ln(2))$$

Corrente reversa I_R no NMOS

$$\frac{V_G - V_{T0} - n_R V_D}{n_R \phi_T} = \sqrt{1 + 4 \frac{I_R}{I_{ESP}}} + \ln \left(\sqrt{1 + 4 \frac{I_R}{I_{ESP}}} - 1 \right) - (1 + \ln(2))$$

Equações do Modelo EKV

$$IC_{F,R} = \frac{I_{F,R}}{I_{ESP}} \rightarrow \text{coeficiente de inversão}$$

$$\frac{V_G - V_{T0} - n_{F,R} V_{S,D}}{n_{F,R} \phi_T} = \sqrt{1 + 4IC_{F,R}} + \ln\left(\sqrt{1 + 4IC_{F,R}} - 1\right) - (1 + \ln(2))$$

$$I_{ESP} = 2n_{F,R} \phi_T^2 k_p \frac{W}{L_{EF}}$$

$$V_{T0} = V_{FB} + \phi_0 + \gamma \sqrt{\phi_0}$$

$$\phi_0 \cong 2\phi_F + \phi_T \ln\left(1 + \frac{2\sqrt{2\phi_F}}{\gamma}\right)$$

$$n_{F,R} = \begin{cases} 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{2\phi_F + V_{S,D}}} \rightarrow \text{predominantemente em inversão fraca} \\ 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{2\phi_F}} \rightarrow \text{predominantemente em inversão forte ou moderada} \end{cases}$$

$$n_F \cong n_R = n = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{2\phi_F}} \rightarrow \text{para a maioria das aplicações}$$

Regiões e Modos de Operação

$$IC = \max(I_F/I_{ESP}, I_R/I_{ESP})$$

$$\begin{cases} IC \ll 1 \rightarrow \text{inversão fraca} \\ IC \approx 1 \rightarrow \text{inversão moderada} \\ IC \gg 1 \rightarrow \text{inversão forte} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_F \gg I_R \rightarrow \text{saturação direta} \\ I_R \gg I_F \rightarrow \text{saturação reversa} \\ I_F > I_R \rightarrow \text{triódo direta} \\ I_R < I_F \rightarrow \text{triódo reversa} \end{cases}$$

Aproximação para Inversão Fraca

Na inversão fraca o coeficiente de inversão é muito pequeno, $IC \ll 1$

$$n_F \cong n_R = n$$

$$\frac{V_G - V_{T0} - nV_{S,D}}{n\phi_T} = \sqrt{1 + 4IC_{F,R}} + \ln(\sqrt{1 + 4IC_{F,R}} - 1) - (1 + \ln(2))$$

$$IC_{F,R} \ll 1 \rightarrow \frac{V_G - V_{T0} - nV_{S,D}}{n\phi_T} \cong \ln(\sqrt{1 + 4IC_{F,R}} - 1) - \ln(2) \rightarrow \sqrt{1 + 4IC_{F,R}} = 2e^{\frac{V_G - V_{T0} - nV_{S,D}}{n\phi_T}} + 1$$

$$\sqrt{1 + 4IC_{F,R}} \cong 1 + 2IC_{F,R} \rightarrow IC_{F,R} = e^{\frac{V_G - V_{T0} - nV_{S,D}}{n\phi_T}} \rightarrow \frac{I_{F,R}}{I_{ESP}} = e^{\frac{V_G - V_{T0} - nV_{S,D}}{n\phi_T}}$$

$$I_{F,R} = 2n\phi_T^2 k_p \frac{W}{L_{EF}} e^{\frac{V_G - V_{T0} - nV_{S,D}}{n\phi_T}}$$

$$I_{DS} = I_F - I_R$$

$$I_{DS} = 2n\phi_T^2 k_p \frac{W}{L_{EF}} e^{\frac{V_{GS} - V_{T0} - (n-1)V_S}{n\phi_T}} \left(1 - e^{\frac{-V_{DS}}{\phi_T}} \right)$$

Aproximação para Inversão Forte

Na inversão forte o coeficiente de inversão é muito grande, $IC \gg 1$

$$n_F \cong n_R = n$$

$$\frac{V_G - V_{T0} - nV_{S,D}}{n\phi_T} = \sqrt{1 + 4IC_{F,R}} + \ln\left(\sqrt{1 + 4IC_{F,R}} - 1\right) - (1 + \ln(2))$$

$$IC_{F,R} \gg 1 \longrightarrow \frac{V_G - V_{T0} - nV_{S,D}}{n\phi_T} \cong \sqrt{4IC_{F,R}} \longrightarrow IC_{F,R} = \frac{1}{4} \left(\frac{V_G - V_{T0} - nV_{S,D}}{n\phi_T} \right)^2$$

$$I_{F,R} = \frac{I_{ESP}}{4} \left(\frac{V_G - V_{T0} - nV_{S,D}}{n\phi_T} \right)^2$$

$$I_{DS} = I_F - I_R \longrightarrow I_{DS} = \frac{I_{ESP}}{4} \left(\left(\frac{V_G - V_{T0} - nV_S}{n\phi_T} \right)^2 - \left(\frac{V_G - V_{T0} - nV_D}{n\phi_T} \right)^2 \right)$$

$$I_{DS} = k_p \frac{W}{L_{EF}} \left((V_{GS} - V_{T0} - (n-1)V_S)V_{DS} - \frac{n}{2}V_{DS}^2 \right) \longleftarrow \text{Triodo}$$

$$I_{DS} = \frac{k_p}{2n} \frac{W}{L_{EF}} (V_{GS} - V_{T0} - (n-1)V_S)^2 \rightarrow V_{DSsat} = \frac{V_{GS} - V_{T0} - (n-1)V_S}{n} \longleftarrow \text{Saturação}$$

Solução da Equação Implícita pela Função LambertW(x)

A equação implícita do EKV permite aproximações para a inversão fraca e a forte, porém, para IC próximo de 1, inversão moderada, não é possível fazer aproximações. Entretanto existe uma solução exata para $I_{F,R}$ pela função LambertW(x).

A Função LambertW(x)

$$x = ye^y \longrightarrow y = \text{LambertW}(x)$$

Algumas Propriedades da Função LambertW(x)

$$\frac{\partial \text{LambertW}(x)}{\partial x} = \frac{\text{LambertW}(x)}{(1 + \text{LambertW}(x))x}$$

$$\int \text{LambertW}(x) dx = \frac{(\text{LambertW}(x)^2 - \text{LambertW}(x) + 1)x}{\text{LambertW}(x)} + C$$

$$\text{LambertW}(0) = 0$$

$$\text{LambertW}(\infty) = \infty$$

Cálculo de I_{DS}

$$\frac{V_G - V_{T0} - nV_{S,D}}{n\phi_T} = \sqrt{1 + 4 \frac{I_{F,R}}{I_{ESP}}} + \ln \left(\sqrt{1 + 4 \frac{I_{F,R}}{I_{ESP}}} - 1 \right) - (1 + \ln(2))$$

$$\frac{V_G - V_{T0} - nV_{S,D}}{n\phi_T} + \ln(2) = \left(\sqrt{1 + 4 \frac{I_{F,R}}{I_{ESP}}} - 1 \right) + \ln \left(\sqrt{1 + 4 \frac{I_{F,R}}{I_{ESP}}} - 1 \right)$$

$$2e^{\frac{V_G - V_{T0} - nV_{S,D}}{n\phi_T}} = \left(\sqrt{1 + 4 \frac{I_{F,R}}{I_{ESP}}} - 1 \right) e^{\left(\sqrt{1 + 4 \frac{I_{F,R}}{I_{ESP}}} - 1 \right)}$$

$$\sqrt{1 + 4 \frac{I_{F,R}}{I_{ESP}}} - 1 = \text{LambertW} \left(2e^{\frac{V_G - V_{T0} - nV_{S,D}}{n\phi_T}} \right) \rightarrow I_{F,R} = \frac{I_{ESP} \left(\left(\text{LambertW} \left(2e^{\frac{V_G - V_{T0} - nV_{S,D}}{n\phi_T}} \right) + 1 \right)^2 - 1 \right)}{4}$$

$$I_{DS} = I_F - I_R$$

$$I_{DS} = \frac{n\phi_T^2 k_p W \left(\left(\text{LambertW} \left(2e^{\frac{V_G - V_{T0} - nV_S}{n\phi_T}} \right) + 1 \right)^2 - \left(\text{LambertW} \left(2e^{\frac{V_G - V_{T0} - nV_D}{n\phi_T}} \right) + 1 \right)^2 \right)}{2L_{EF}}$$

Efeito de Modulação de Canal e DIBL

Podemos usar o modelo do Lambda com a função LambertW, e manter a simetria do modelo.

$$I_{DS} = \frac{n\phi_T^2 k_p W \left(\left(\text{LambertW} \left(2e^{\frac{V_G - V_{T0} - nV_S}{n\phi_T}} \right) + 1 \right)^2 - \left(\text{LambertW} \left(2e^{\frac{V_G - V_{T0} - nV_D}{n\phi_T}} \right) + 1 \right)^2 \right)}{2L_{EF}} (1 + \lambda |V_D - V_S|)$$

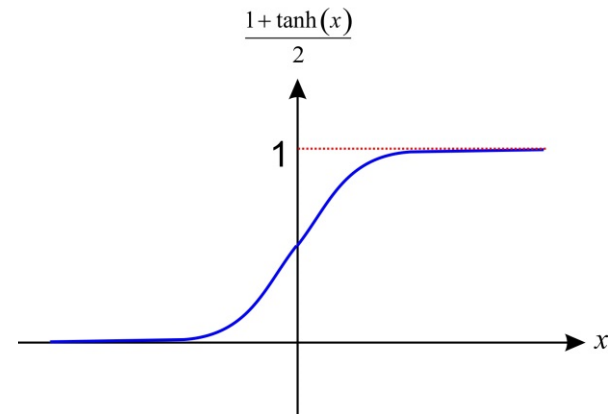
Modulação de Mobilidade – Possível Implementação

$$I_{DS} = \frac{n\phi_T^2 k_p W \left(\frac{1}{\theta_F} \left(\text{LambertW} \left(2e^{\frac{V_G - V_{T0} - nV_S}{n\phi_T}} \right) + 1 \right)^2 - \frac{1}{\theta_R} \left(\text{LambertW} \left(2e^{\frac{V_G - V_{T0} - nV_D}{n\phi_T}} \right) + 1 \right)^2 \right)}{2L_{EF}} (1 + \lambda |V_D - V_S|)$$

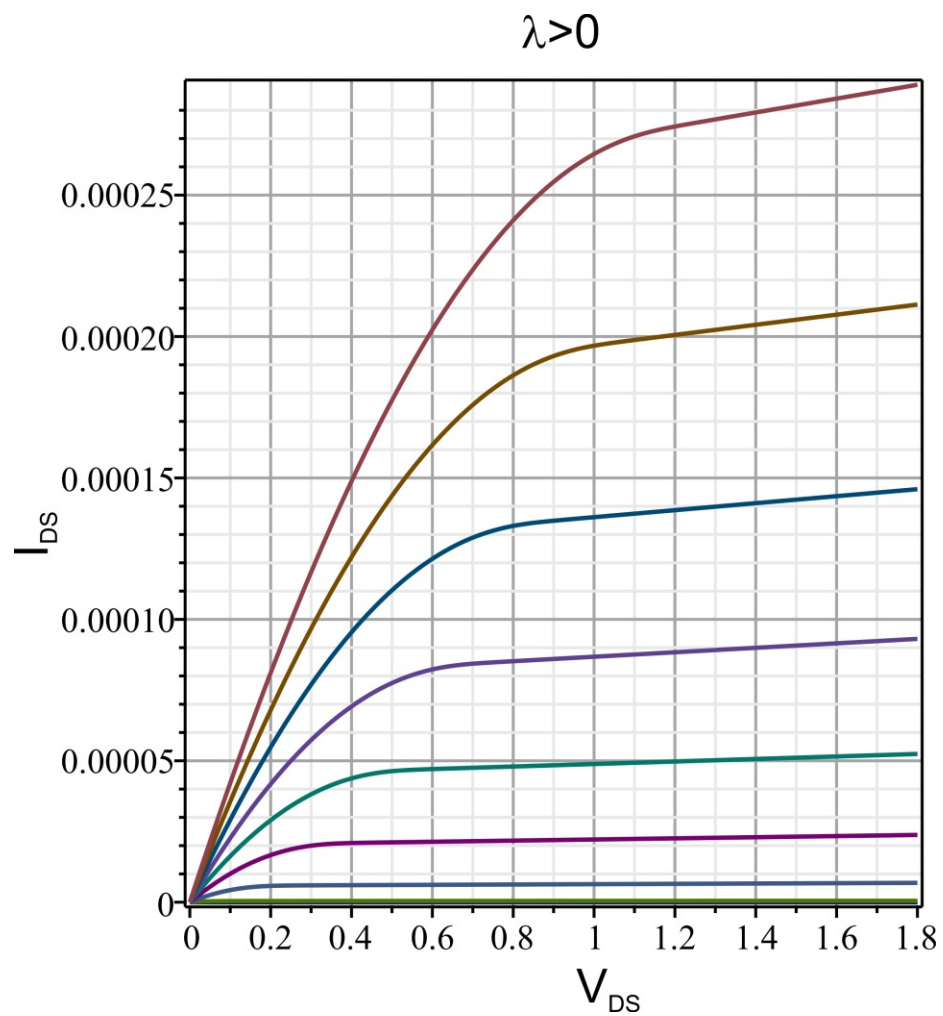
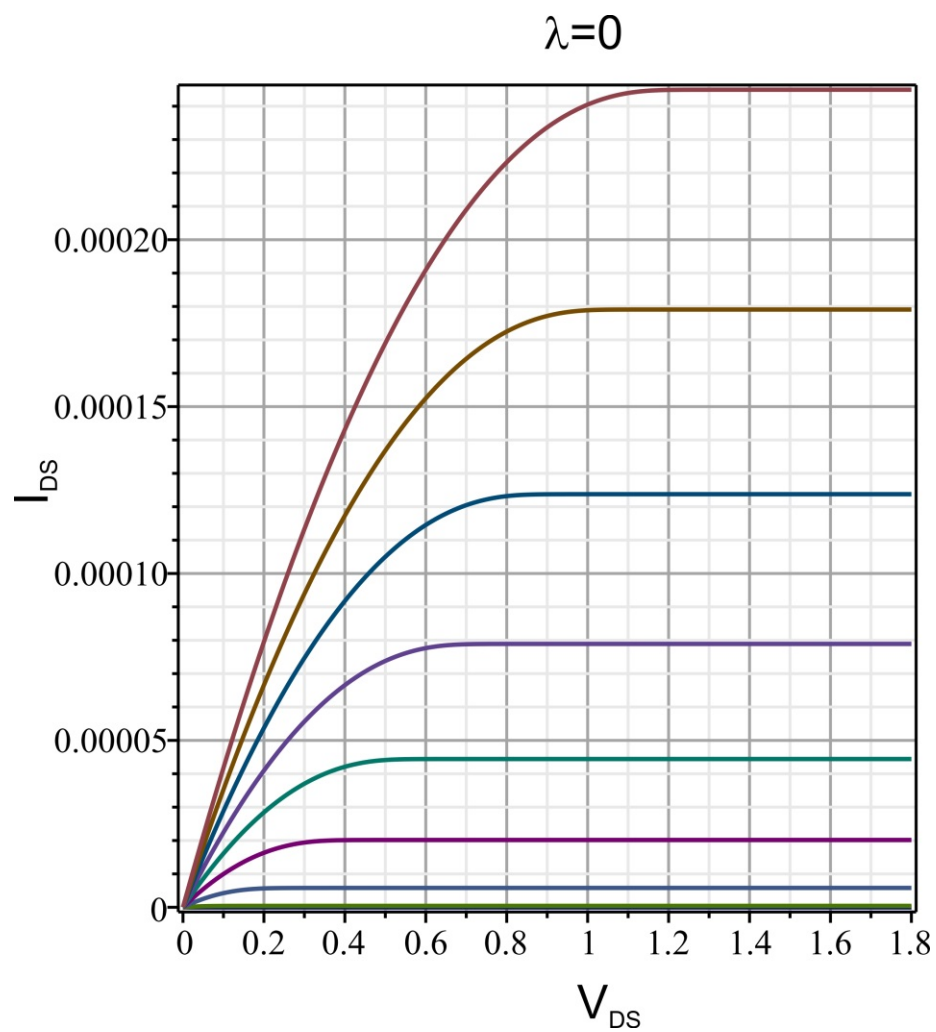
$$\theta_F = \frac{1 + \tanh(a_\theta (V_G - V_S - V_{T0}))}{2} (V_G - V_S - V_{T0})\theta + 1$$

$$\theta_R = \frac{1 + \tanh(a_\theta (V_G - V_D - V_{T0}))}{2} (V_G - V_D - V_{T0})\theta + 1$$

$a_\theta > 1 \rightarrow$ serve para ajustar as curvas



Curvas Características



Parâmetros de Pequenos Sinais

$$i_{F,R} = \frac{\partial I_{F,R}}{\partial V_G} v_G + \frac{\partial I_{F,R}}{\partial V_S} v_S + \frac{\partial I_{F,R}}{\partial V_D} v_D$$

$$i_{DS} = i_F - i_R = gm_G v_G + gm_S v_S + gm_D v_D$$

$$\frac{V_G - V_{T0} - nV_{S,D}}{n\phi_T} = \sqrt{1 + 4 \frac{I_{F,R}}{I_{ESP}}} + \ln \left(\sqrt{1 + 4 \frac{I_{F,R}}{I_{ESP}}} - 1 \right) - (1 + \ln(2))$$

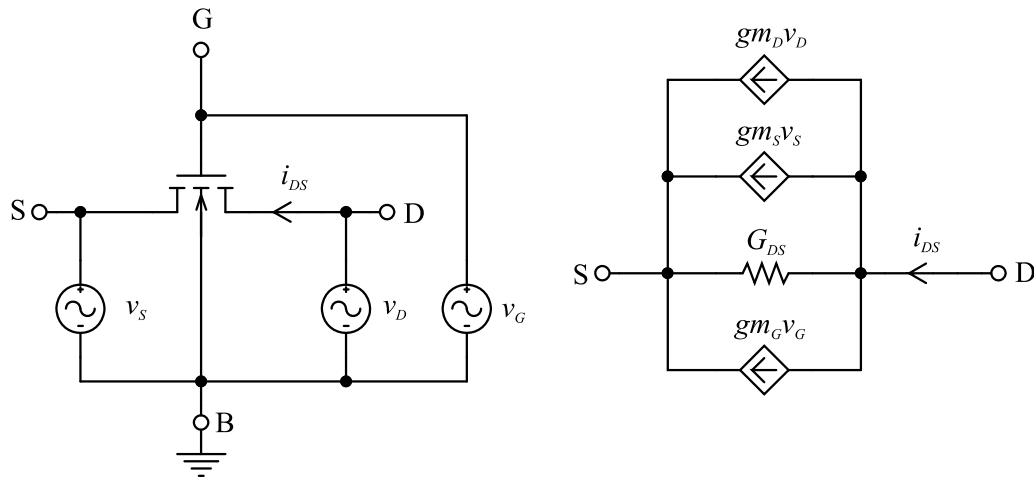
Todas as Regiões e Modos de Operação

$$\left\{ \begin{array}{l} gm_G = \frac{\partial I_F}{\partial V_G} - \frac{\partial I_R}{\partial V_G} = \frac{I_{ESP}}{2n\phi_T} \left(\sqrt{1 + 4 \frac{I_F}{I_{ESP}}} - \sqrt{1 + 4 \frac{I_R}{I_{ESP}}} \right) \\ gm_S = \frac{\partial I_F}{\partial V_S} - \frac{\partial I_R}{\partial V_S} = -\frac{I_{ESP}}{2\phi_T} \left(\sqrt{1 + 4 \frac{I_F}{I_{ESP}}} - 1 \right) \\ gm_D = \frac{\partial I_F}{\partial V_D} - \frac{\partial I_R}{\partial V_D} = \frac{I_{ESP}}{2\phi_T} \left(\sqrt{1 + 4 \frac{I_R}{I_{ESP}}} - 1 \right) \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} gm_G = \phi_T k_P \frac{W}{L_{EF}} \left(\sqrt{1 + 4IC_F} - \sqrt{1 + 4IC_R} \right) \\ gm_S = -n\phi_T k_P \frac{W}{L_{EF}} \left(\sqrt{1 + 4IC_F} - 1 \right) \\ gm_D = n\phi_T k_P \frac{W}{L_{EF}} \left(\sqrt{1 + 4IC_R} - 1 \right) \end{array} \right.$$

Saturação em Inversão Forte – $IC_F \gg IC_R$ e $IC_R \ll 1$

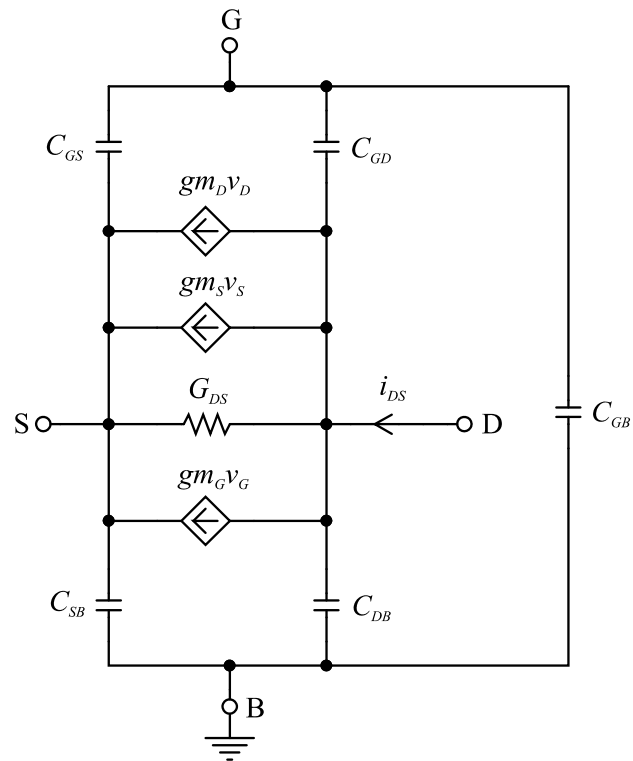
$$\left\{ \begin{array}{l} gm_G = \phi_T k_P \frac{W}{L_{EF}} \left(\sqrt{1 + 4IC_F} - 1 \right) \\ gm_S = -n\phi_T k_P \frac{W}{L_{EF}} \left(\sqrt{1 + 4IC_F} - 1 \right) \\ gm_D = 0 \end{array} \right.$$

Modelo de Pequenos Sinais



$$\rightarrow G_{DS} = \lambda |I_{DS}| = \lambda |I_F - I_R|$$

Modelo de Pequenos Sinais de Alta Frequência



Expressões para o Transistor PMOS

Da mesma forma que o transistor NMOS, o PMOS pode ser equacionado no modelo EKV através da função LambertW, bastando fazer as seguintes transformações de variáveis na modelagem do NMOS:

$V_B \rightarrow$ tensão de bulk

$V_G \rightarrow V_B - V_G$

$V_S \rightarrow V_B - V_S$

$V_D \rightarrow V_B - V_D$

$V_{T_0} \rightarrow |V_{T_0}|$

$$\frac{V_{BG} - |V_{T0}| - n_{F,R} V_{BS,BD}}{n_{F,R} \phi_T} = \sqrt{1 + 4IC_{F,R}} + \ln\left(\sqrt{1 + 4IC_{F,R}} - 1\right) - (1 + \ln(2))$$

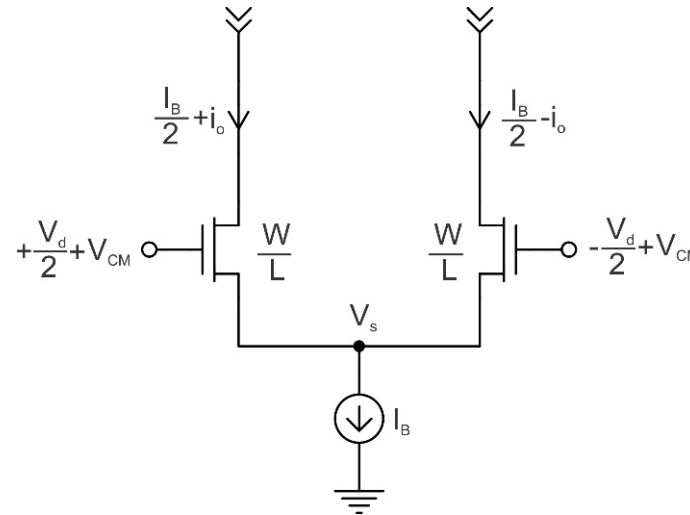
Corrente direta I_F no PMOS

$$\frac{V_{BG} - |V_{T0}| - n_F V_{BS}}{n_F \phi_T} = \sqrt{1 + 4 \frac{I_F}{I_{ESP}}} + \ln\left(\sqrt{1 + 4 \frac{I_F}{I_{ESP}}} - 1\right) - (1 + \ln(2))$$

Corrente reversa I_R no PMOS

$$\frac{V_{BG} - |V_{T0}| - n_R V_{BD}}{n_R \phi_T} = \sqrt{1 + 4 \frac{I_R}{I_{ESP}}} + \ln\left(\sqrt{1 + 4 \frac{I_R}{I_{ESP}}} - 1\right) - (1 + \ln(2))$$

Transcondutância do Amplificador Diferencial em Função do Coeficiente de Inversão



Equações do modelo EKV na saturação – $I_F \gg I_R$

$$\frac{\frac{v_d}{2} + V_{CM} - V_{T0} - n v_S}{n \phi_T} - \sqrt{1 + 4 \frac{\frac{I_B}{2} + i_o}{I_{ESP}}} - \ln \left(\sqrt{1 + 4 \frac{\frac{I_B}{2} + i_o}{I_{ESP}}} - 1 \right) + (1 + \ln(2)) = 0$$

$$\frac{-\frac{v_d}{2} + V_{CM} - V_{T0} - n v_S}{n \phi_T} - \sqrt{1 + 4 \frac{\frac{I_B}{2} - i_o}{I_{ESP}}} - \ln \left(\sqrt{1 + 4 \frac{\frac{I_B}{2} - i_o}{I_{ESP}}} - 1 \right) + (1 + \ln(2)) = 0$$

Equações do modelo EKV na saturação – $I_F \gg I_R$

$$\frac{\frac{v_d}{2} + V_{CM} - V_{T0} - nv_S}{n\phi_T} - \sqrt{1 + 4 \frac{\frac{I_B}{2} + i_0}{I_{ESP}}} - \ln \left(\sqrt{1 + 4 \frac{\frac{I_B}{2} + i_0}{I_{ESP}}} - 1 \right) + (1 + \ln(2)) = 0$$

$$\frac{-\frac{v_d}{2} + V_{CM} - V_{T0} - nv_S}{n\phi_T} - \sqrt{1 + 4 \frac{\frac{I_B}{2} - i_0}{I_{ESP}}} - \ln \left(\sqrt{1 + 4 \frac{\frac{I_B}{2} - i_0}{I_{ESP}}} - 1 \right) + (1 + \ln(2)) = 0$$

$$IC = \frac{I_B}{2I_{ESP}}$$

$$\frac{\frac{v_d}{2} + V_{CM} - V_{T0} - nv_S}{n\phi_T} - \sqrt{1 + 4IC + \frac{4i_0}{I_{ESP}}} - \ln \left(\sqrt{1 + 4IC + \frac{4i_0}{I_{ESP}}} - 1 \right) + (1 + \ln(2)) = 0$$

$$\frac{-\frac{v_d}{2} + V_{CM} - V_{T0} - nv_S}{n\phi_T} - \sqrt{1 + 4IC - \frac{4i_0}{I_{ESP}}} - \ln \left(\sqrt{1 + 4IC - \frac{4i_0}{I_{ESP}}} - 1 \right) + (1 + \ln(2)) = 0$$

$$\frac{v_d}{n\phi_T} - \sqrt{1 + 4IC + \frac{4i_0}{I_{ESP}}} - \ln\left(\sqrt{1 + 4IC + \frac{4i_0}{I_{ESP}}} - 1\right) + \sqrt{1 + 4IC - \frac{4i_0}{I_{ESP}}} + \ln\left(\sqrt{1 + 4IC - \frac{4i_0}{I_{ESP}}} - 1\right) = 0$$

$$\frac{\partial\left(\frac{v_d}{n\phi_T} - \sqrt{1 + 4IC + \frac{4i_0}{I_{ESP}}} - \ln\left(\sqrt{1 + 4IC + \frac{4i_0}{I_{ESP}}} - 1\right) + \sqrt{1 + 4IC - \frac{4i_0}{I_{ESP}}} + \ln\left(\sqrt{1 + 4IC - \frac{4i_0}{I_{ESP}}} - 1\right)\right)}{\partial v_d} = 0$$

$$gm_d(i_0) = \frac{\partial i_0}{\partial v_d}$$

$$I_{ESP} = 2n\phi_T^2 k_p \frac{W}{L_{EF}}$$

$$gm_d(i_0) = \frac{I_{ESP}}{2n\phi_T} \frac{\left(\sqrt{1 + 4IC + \frac{4i_0}{I_{ESP}}} - 1\right)\left(\sqrt{1 + 4IC - \frac{4i_0}{I_{ESP}}} - 1\right)}{\sqrt{1 + 4IC + \frac{4i_0}{I_{ESP}}} + \sqrt{1 + 4IC - \frac{4i_0}{I_{ESP}}} - 2}$$

Em $i_0=0$, $gm_d(0)=gm_{dmax}$

$$gm_{dmax} = \frac{I_{ESP}}{4n\phi_T} \left(\sqrt{1 + 4IC} - 1\right) \xrightarrow{IC = \frac{I_B}{2I_{ESP}}} gm_{dmax} = \frac{I_{ESP}}{4n\phi_T} \left(\sqrt{1 + 2\frac{I_B}{I_{ESP}}} - 1\right)$$

$IC \ll 1 \rightarrow gm_{dmax} = \frac{I_B}{4n\phi_T}$

$IC \gg 1 \rightarrow gm_{dmax} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k_p W I_B}{n L_{EF}}}$

$I_{ESP} = 2n\phi_T^2 k_p \frac{W}{L_{EF}}$

**Final deste
Tópico**